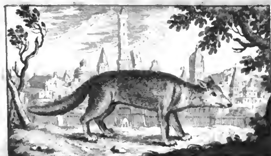


ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
PIANA E SOLIDA
E DELLA
TRIGONOMETRIA

Opera Postuma

DEL DOTT. EUSTACHIO MANFREDI

Professore delle Matematiche, sovraintendente alle Acque, e Astronomo dello Instituto delle Scienze in Bologna, e Associato alle Regie Accademie di Londra, e di Parigi.







IN BOLOGNA

Nella Stamperia di Lelio dalla Volpe.)(1755.)(

CON LICENZA DE' SUPERIORI.



LO STAMPATORE

A chi legge.

MI conviene avvisarvi, o cortese Lettore, che quest' opera, che pubblico ora colle mie stampe quantunque riconosca per suo autore il Sig. Eustachio Manfredi, pure non è stata da lui interamente compita, e ridotta a quello stato, in cui presentemente si trova. Mancavano alcune proposizioni appartenenti alla dottrina de' solidi, e sono quelle, che incominciano negli elementi della Geometria de' solidi pag. 116 num 62, e seguono fino al fine di essi solidi. Queste sono state aggiunte dal Sig Eraclito Manfredi celebre Medico, e Professore di Matematica in questa Università. Non era conveniente lasciare quest'opera imperfetta per non pregiudicare al vantaggio de' Giovani studenti, che così non avranno a cercare altrove quelle dottrine, che quivi mancavano; ed acciocche non rechi dispiacere, che il Sig. Eustachio abbia lasciato quest' opera imperfetta, basta riflettere, che essa è poi stata dal Fratello terminata.

INDICE

Degli elementi della Geometria de' piani.

LIBRO I.

LIBRO II.

LIBRO III.

LIBRO IV.

LI-

LIBRO V.

LIBRO VI.

LIBRO VII.

LIBRO VIII.

Degli elementi della Geometria de' solidi.

LIBRO I.

LIBRO II.

LI-

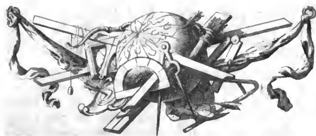
LIBRO III.

Compendio della Trigonometria.

Appendice alla Trigonometria.

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
PIANA.



ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO I.

Delle linee, e degli angoli.

1 LE *ſcienze matematiche* trattano della quantità, e della proprietà di eſſa.

2 Col nome di *quantità* intendono i Matematici tutto quello, che nel proprio genere è capace del più, e del meno; come il tempo, il moto, il peſo, la forza, l' eſtenſione &c.

3 Quella parte delle matematiche, che tratta della eſtenſione, diceſi *Geometria*.

4 Un' eſtenſione preſa per un ſol verſo, cioè in lunghezza, chiamaſi *linea*; un' eſtenſione per due verſi, cioè in lunghezza, e in larghezza, *ſuperficie*; e un' eſtenſione per tutti e tre i verſi, cioè in lunghezza, larghezza, e groſſezza, (o profondità, o altezza, che dir la vogliamo) *corpo*, o *ſolido*; quell' ultimo termine, che nell' eſtenſione può concepirſi ſenza alcuna eſtenſione, diceſi *punto*.

5 Delle linee altre ſono *rette*, altre *curve*; le rette ſono quelle, che ſi eſtendono egualmente fra' loro punti, ſenza pie-

gare da alcuna parte, come A, A (*Fig.*1). Le curve ſono quelle, che piegano da qualche parte, come B, B. Onde tra' due punti poſſono tirarſi più linee curve, come C, ma una ſola retta D.

6 Parimente delle *ſuperficie* altre ſono *piane*, altre *curve*; ſuperficie piana è quella, che viene combaciata da una retta linea in qualunque poſitura queſta le ſi adatti, e chiamaſi anco neutralmente, con un ſolo vocabolo, un *piano*. Superficie curva è quella, che non può eſſere combaciata da una retta in tutte le poſiture, nella quale queſta vi ſi può applicare.

7 Tanto le linee curve, quanto le ſuperficie curve diconſi *conveſſe* al di fuori, e al di dentro *concave*.

Della circonferenza del circolo.

8 LE linee rette non ſi ſuddividono, ma le curve ſono di molte ſpecie, ſecondo le differenti maniere di curvità, che poſſono eſſerci. Fra queſte ſi conſidera ſpecialmente da' Geometri quella curva, che chiamaſi *circonferenza di circolo*. Queſta ſi deſcrive dalla eſtremità d'una linea retta, come B (*Fig.*2), quando queſta linea, ſtando ferma coll' altra eſtremità A, gira ſopra di un piano intorno al punto A, finchè ſia tornata alla ſituazione AB, d'onde incomincia il giro. Il punto immobile A chiamaſi *centro*. La retta AB, preſa in qualſivoglia delle ſituazioni, nelle quali ſi è trovata nel ſuo giro, come in AB, in AC, in AD, diceſi *ſemidiametro*, *raggio*, o *intervallo*, ond' è manifeſto, che tutte le linee tirate dal centro alla circonferenza d'un medeſimo circolo ſono ſemidiametri, e tutte ſono eguali. Qualſivoglia porzione della circonferenza, come BC, BD &c. diceſi *arco*; e finalmente lo ſpazio piano compreſo, e chiuſo d'ogni intorno dalla circonferenza vien chiamato circolo, e la circonferenza ſteſſa diceſi ancora *perimetro*, o *periferia*.

9 Se per lo centro d'un circolo E (*Fig.*3), ſi tirerà una retta linea, come FG, terminata dall' una, e dall' altra parte alla circonferenza in F, e G, è manifeſto, che ella ſarà doppia del ſemidiametro EF, ovvero GE di quel circolo, e perciò la detta linea GF chiamaſi *diametro*; e che tutt' i diametri d'un medeſimo circolo, come GF, HI, &c. ſono eguali fra loro.

10

10 Ogni diametro, come FG, divide il circolo in due parti eguali, che diconsi *ſemicircoli*, e parimente divide la circonferenza in due archi eguali FHG, GIF. Avvertaſi, che qualche volta il nome di circolo ſi attribuiſce alla ſteſſa circonferenza FHGI, e non allo ſpazio chiuſo da eſſa, come pure il nome di ſemicircolo alla ſemicirconferenza.

11 Se ſopra una medeſima retta linea ſi prenderanno più punti, come C, B, D, &c (*Fig.* 4) e ſi farà girare la detta linea ſopra d' un piano intorno al ſuo punto eſtremo A, ciaſcun de' punti C, B, D, &c. deſcriverà una circonferenza, ed il centro comune di tutte queſte circonferenze ſarà il punto A. Le dette circonferenze chiamanſi in tal caſo *concentriche*, come pure i circoli ſteſſi, che queſte abbracciano. E' manifeſto, che tutti gli archi di circonferenze concentriche, come CE, BF, DG &c., che reſtano compreſi fra due rette linee AD, AG, che paſſano per lo centro comune A delle dette circonferenze, ſono egual parte delle loro intere circonferenze CEHC, BFIB, DGLD &c., come ſe CE foſſe la ſeſta parte della circonferenza CEHC, anco BF ſarebbe la ſeſta parte della BFIB &c. E perchè i Geometri intendono diviſa ogni circonferenza di circolo in 360 parti eguali, che chiamanſi *gradi*, e ogni grado in 60 *minuti*, e ogni minuto in 60 *ſecondi* &c., ne ſegue, che di quanti gradi, minuti, e ſecondi &c. ſi troverà eſſer uno de' detti archi, come CE d' altrettanti ſaranno gli altri BF, DG &c. I numeri de' minuti, ſecondi &c., ſi contraſſegnano con lineette, che indicano l' ordine delle ſuddette diviſioni; come per eſprimere un arco di 75 gradi 49 minuti, e 35 ſecondi ſi ſcrive 75 49' 35".

Degli angoli.

12 Due linee, che s' incontrino in un punto, diconſi *fare*, o *comprendere*, o *contenere angolo* una coll' altra in quel punto, eccettuandone ſe foſſero due rette poſte in diritto una dell' altra, nel qual caſo non ſi diranno far angolo, ne ſi conſidereranno, come due linee, ma come una ſola. Se amendue le linee, che fanno angolo ſono in un medeſimo piano, (come ſuccede ſempre quando amendue ſono rette, poten-

dosi sempre immaginar un piano, che passi per l'una, e per l'altra di esse) l'angolo, che fanno chiamasi *piano*. Se l'angolo è fatto da due rette, dicesi *rettilineo*, come A, A, A (*Fig.*5); se da due curve *curvilineo*, come B, B, B; se da una retta, e da una curva *misto*, come C, C.

13 Un angolo rettilineo dicesi maggiore, o minore a misura, che maggiore, o minore è l'apertura delle rette linee, che lo comprendono, senza avere alcun riguardo alla lunghezza di esse linee.

Così l'angolo D (*Fig.6.*), si dirà minore dell'angolo E; perocchè le linee, che comprendono il primo sono più strette, e serrate insieme di quel, che sieno le linee, che contengono il secondo, contuttochè quelle sieno per avventura più lunghe di queste; e quindi è, che per allungare, o raccorciare, una, o amendue le linee, che fanno un angolo, questo non si muta punto, ma ben mutasi al mutarne l'apertura. Questa apertura dunque, nella quale consiste la quantità dell'angolo, si misura da' Geometri dal numero de' gradi, minuti, secondi &c. che contiene un arco di circonferenza di circolo compreso fra le due rette, che fanno l'angolo, e il cui centro sia nel punto medesimo, in cui si fa l'angolo.

Così se dal centro D si intenderà descritta una circonferenza di circolo, della quale l'arco HI resti compreso fra le rette linee HD, ID, che contengon l'angolo D, quest'angolo si dirà essere di tanti gradi, e minuti &c. di quanti sarà il detto arco HI. E parimente se dal centro E si descriverà una circonferenza, il cui arco FG, resti compreso tra le rette, che contengono l'angolo E, dirassi l'angolo E di tanti gradi, e minuti &c. quanti ne ha quest'arco FG, nè importa di qual grandezza si descrivano detti circoli; perocchè tutti gli archi delle circonferenze concentriche comprese fra le stesse rette, che passano per lo centro di esse, hanno un egual numero di gradi, minuti &c., come si è detto nell'articolo 11. Da ciò s'intende, che fra gli angoli rettilinei quello è maggiore, che si misura da un arco di maggior numero di gradi, minuti &c., e quello minore, che si misura da un minor numero di questi.

14 Per esprimere gli angoli rettilinei costumano i Geometri di valersi di tre lettere apposte alle linee, che contengono l'angolo,

golo, di cui si parla, mettendo in secondo luogo quella, che è apposta al punto, in cui si fa l'angolo, e nel primo, e terzo luogo quelle, che sono apposte all'altre due estremità delle rette, che lo contengono. A cagion d'esempio, l'angolo fatto in H (*Fig.* 7) dalle rette FH, GH, dicesi FHG, ovvero GHF; quello, che vien fatto in G dalle due FG, OG, dirassi FGO, ovvero OGF; quello, che si fa parimente in G dalle due FG, GH, dirassi HGF, ovvero FGH. Così OGH, oppure HGO vorrà dire l'angolo fatto in G dalle due HG, OG, e HFG significherà quello, che nel punto F vien compreso dalle GF, HF &c. Talvolta nulladimeno (ove ciò possa farsi senza equivoco) esprimonsi gli angoli con una sola lettera apposta a quel punto, in cui si fanno, come di sopra abbiamo praticato (articolo 13) per esprimere gli angoli D, E.

15 Qualunque volta l'arco di circolo BC, (*Fig.* 8) che misura l'angolo rettilineo BAC sia precisamente la quarta parte della circonferenza, (che viene ad essere gradi 90, essendo questa di gradi 360 per l'articolo 11) l'angolo BAC chiamasi *retto*, e le rette BA, CA, che lo comprendono *perpendicolari* una rispetto all'altra. Onde è chiaro, che tutti gli angoli retti sono fra loro eguali avendo tutti per misura un arco di 90 gradi.

E' anco manifesto, che compiendo la circonferenza BCDE, il cui centro è il punto A (articolo 13), e prolungando l'una, o l'altra delle dette rette, come BA dalla parte di A, finchè di nuovo incontri la circonferenza in D, la retta BD sarà un diametro (articolo 9), e perciò l'arco BCD sarà la metà della circonferenza (articolo 10), cioè sarà di gr. 180 (articolo 11); onde toltone l'arco BC, che si suppone di gr. 90, il residuo CD sarà anch'egli di gr. 90, e perciò l'angolo CAD anch'esso sarà retto.

16 Ma se l'arco BC (*Fig.* 9), che misura l'angolo BAC, fosse minore di gr. 90, allora l'angolo BAC direbbesi *acuto*, e se maggiore ottuso, e nell'uno, e nell'altro caso *obbliquo*. Posto dunque che BAC sia acuto, se si prolungherà, come sopra, una delle due rette, che lo contengono, come BA, fino alla circonferenza in D, di nuovo la retta BD sarà un diametro, e l'arco BCD di 180 gradi, e perciò è evidente,

che

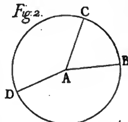
che l' arco CD di tanto eccederà 90 gradi di quanto ne manca BC; onde l' angolo CAD farà per necessità ottuso, e amendue BAC, CAD presi insieme saranno eguali a' due retti, cioè a 180 gr. Da che generalmente si raccoglie, che quando una retta cadendo sopra d' un' altra fa due angoli, uno dall' una, e l' altro dall' altra parte (i quali angoli diconsi *aggiacenti* alla detta retta, che cade sopra l' altra) questi angoli presi insieme sono sempre eguali a' due retti, e perciò l' uno dicesi *supplemento* dell' altro a' due retti; come pure è chiaro, che se due angoli aggiacenti sono eguali amendue sono retti.

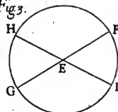
17 Quando due angoli CAB, CAD (*Fig.*10), aggiacenti ad una retta CA, sono retti, prolungando questa retta CA dalla parte di A, come fino in E, anco gli altri due angoli, che nasceranno dall' altra parte della BC, cioè BAE, EAD saranno retti; perocchè ciascuno di questi è aggiacente ad un retto, ed in conseguenza è retto (articolo 16).

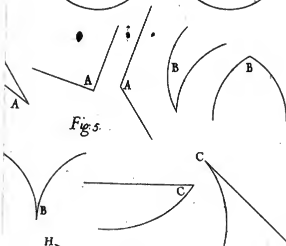
18 Finalmente è chiaro, che se in un punto, come A, (*Fig.*9) si uniranno tre linee rette BA, CA, DA, che facciano i due angoli, BAC, CAD eguali a' due retti, cioè fra tutti e due di gradi 180, le due linee BA, DA non constituiranno, che una sola retta BAD.

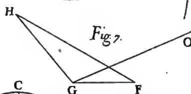
19 Quando due rette linee, dopo essersi incontrate in un punto, proseguiscono oltre, e tagliandosi, formano nel detto punto quattro angoli, come *a*, *b*, *c*, *d* (*Fig.*11), se questi si paragonano insieme a due a due, prendendo con ciascun di essi quello, che non gli è aggiacente, i due angoli così presi diconsi *angoli al vertice*. Tali sono i due *a*, *c*, come pure i due *b*, *d*. Ora è facile il mostrare, che tali angoli sono sempre tra loro eguali. Imperocchè *a* con *b* (i quali sono aggiacenti) presi insieme fanno 180 gradi (articolo 16), ed altrettanti ne fanno ancora *b*, e *c* presi insieme, essendo anch' essi aggiacenti. Se dunque dal numero di 180 gradi, che fa *a* con *b* si leverà il numero de' gradi di *b* qualunque egli sia, e dal medesimo numero di gr. 180, che fa *b* con *c*, si leverà il medesimo numero di *b*, è forza, che il numero de' gradi, che rimangono nell' una, e nell' altra sottrazione sia l' istesso; ma il numero, che rimane dalla prima sottrazione è quel-

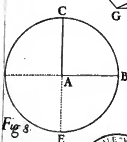
lo

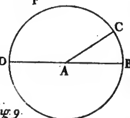

Fig. 2.
C
B
A
D


Fig. 3.
H
F
E
G
I


A
A
A
B
B
Fig. 5.
B
C
C


H
Fig. 7.
O
G
F


C
B
A
Fig. 8.
E


C
D
A
B
Fig. 9.

lo de' gradi di *a*; e dalla seconda quello de' gradi di *c*; dunque *a* ha l' istesso numero di gradi, che *c*, e perciò gli angoli *a*, *c* sono eguali, e nell' istesso modo si proveranno eguali *b*, *d*.

20 Se da un punto preso ad arbitrio si tireranno all' intorno quante linee rette si vorranno, tutte in un medesimo piano, gli angoli fatti da ciascuna di esse con quella che immediatamente le segue appresso (cioè gli angoli *e*, *f*, *g*, *h*, *i* (*Fig.* 12), e più se ve ne fossero) presi tutti insieme non faranno mai ne più, ne meno di 360 gradi, e perciò saranno precisamente eguali a quattro retti, come è evidente; purchè però l' arco di circolo, che si estende dalla prima all' ultima di esse linee, passando per quella di mezzo sia maggiore di gradi 180; altrimenti ne pure arriveranno a fare due retti, come in quest' altra figura succede degli angoli *e*, *f*, *g*, *h*, *i* [*Fig.*13], che prendono meno di 180 gradi, e quell' arco, che resta fra le due linee estreme dalla parte L, non misura alcun angolo.

Delle linee parallele, e inclinate.

21 DUe rette linee poste sopra un medesimo piano, e che sieno per tutto egualmente distanti fra loro, chiamansi *parallele*, o *equidistanti*. La distanza di esse s' intende doversi prendere perpendicolarmente da un punto dell' una fino all' altra; come se dal punto A [*Fig.*14] della retta AB si supporrà tirata la retta AC, che sia perpendicolare alla CD, e parimente da un altro punto B della prima AB sarà tirata un' altra retta BD anch' essa perpendicolare a CD, e queste due perpendicolari AC, BD, si trovino eguali fra loro, e ciò sempre succeda qualunque punto si prenda in tutta la lunghezza delle linee AB, CD, queste due rette si diranno parallele.

22 E' manifesto per se stesso, che se due rette si troveranno equidistanti per qualche tratto, come per AB, CD, non potranno cessare di esser tali proseguendo oltre, o dall' una, o dall' altra parte; perocchè se, a cagion d' esempio, passato il punto B si accrescesse, o si diminuisse la distanza della AB dalla CD [come si vede nelle linee BH], allora non si direbbe, che ABH fosse una sola linea retta, ma ella piegherebbe, e sareb-

farebbe un angolo in B. Quindi si raccoglie, che due linee parallele prolungate anco in infinito dall'una, o dall'altra parte mai non si accostano insieme, e per conseguenza mai non si incontrano, ne fanno angolo insieme.

23 E all'incontro due linee rette poste sul medesimo piano, le quali prolungate dall'una, e dall'altra parte in infinito mai non s'incontrino insieme, saranno parallele.

24 Se saranno due parallele AC, DF (*Fig.* 15), e una retta linea GB incontrerà una di esse nel punto B, è chiaro, che ella prolungata che sia, entrerà nello spazio compreso fra le parallele, e andrà ad incontrare anco l'altra di esse (almeno prolungata) in qualche punto; e perciò una retta non può tagliare una di due parallele senza andar a tagliare anco l'altra. Supposto dunque, che una retta cada sopra due parallele, e le tagli ambedue, ne nasceranno nel punto di ciascuna sezione quattro angoli, che in tutto saranno otto, ciascun de' quali per maggior facilità esprimeremo (*Fig.* 16) per una sola lettera, e sono A, B, C, D, E, F, G, H; de' quali A, B, H, G, si chiamano *esterni*, e gli altri quattro *interni*. Paragonando ora A con E, quest'ultimo si chiama *interno*, *ed opposto* rispetto a quello; e tale è pure F rispetto a B, e C rispetto a G, D rispetto ad H. Ma C, ed E insieme paragonati si chiamano *interni dall'istessa parte*; e così pure D, ed F. Finalmente C con F, e D con E diconsi *alterni*.

25 Egli è assai chiaro senz'altra prova, che quando una retta cade sopra due parallele, ognuno degli angoli esterni, come A, è eguale al suo interno, ed opposto E, che è come dire, che la detta retta altrettanto pende verso l'una delle parallele, quanto verso l'altra; che se ciò non fosse, quella delle due parallele, verso la quale la terza linea pendesse meno, penderebbe ella verso l'altra, ne più le sarebbe parallela; come se l'angolo A fosse maggior di E, allora, o la parallela di sopra guarderebbe allo in giù dalla parte K, o quella di sotto allo in sù dalla medesima parte.

25 Poichè dunque l'angolo esterno, come A è sempre eguale al suo interno, ed opposto E, e per altro l'angolo A è sempre eguale al suo angolo al vertice D [artic. 19], è forza, che i due E, D, cioè gli alterni sieno sempre tra loro eguali.

27

27 E perchè i due D, C presi insieme, come quelli, che sono aggiacenti, hanno per misura 180 gradi (articolo 17), così se in luogo di D metteremo E, che si è mostrato eguale a D, anco i due E, C, cioè gli interni dalla istessa parte, presi insieme, avranno la stessa misura di 180 gradi, cioè saranno sempre eguali a' due retti.

28 All'incontro qualunque volta una retta linea cadrà sopra due altre rette, se si troverà, che uno degli angoli esterni, come A, sia eguale al suo interno, ed opposto E, si dovrà dire, che queste due linee sieno parallele; E l'istesso dovrà conchiudersi, se uno degli angoli interni, come E, si troverà eguale al suo alterno D; o finalmente se due interni dall'istessa parte, come C, E, si troveranno eguali a' due retti.

29 Se due linee rette, come AB, CD (*Fig.* 17) non saranno tra loro parallele, e che tutta via si trovino nello stesso piano, prolungando l'una, e l'altra dalla parte, ove la loro distanza si diminuisca, finalmente s'incontreranno in un punto. Da che segue, che se una retta GK [*Fig.* 18] sarà parallela ad una di due parallele LM, sarà parallela anco all'altra NO; perocchè se non fosse parallela a questa, l'incontrerebbe in qualche punto. Dunque (per l'articolo 24) incontrerebbe anco l'altra LM, a cui si suppone parallela, il che è impossibile [articolo 22]. Le linee rette come AB, CD [*Fig.* 17], che non sono parallele diconsi *convergenti* dalla parte del loro concorso M, e *divergenti* dalla parte opposta N; diconsi ancora *inclinate* senza aver riguardo all'una, o all'altra parte.

LIBRO II.

Delle figure, e prima de' triangoli.

30 F*Igura* è una superficie, o un solido terminato da tutte le parti.

31 Quelle figure, che consistono in una superficie, se questa sarà piana, chiameransi *figure piane*.

32 Una figura piana dicesi *rettilinea*, quando vien terminata da linee rette, e suol anche in tal caso neutralmente chiamarsi un rettilineo. Ella è poi *curvilinea*, quando è terminata da una, o più linee curve (come il circolo), e *mista*, quando parte da linee curve, parte da rette.

33 Tutte le linee, che terminano una superficie figurata, prese insieme si chiamano il *perimetro*, il *circuito*, la *periferia*, o la *circonferenza* di quella figura, come del circolo si è detto di sopra.

34 Tra le figure piane rettilinee *triangolo rettilineo* chiamasi quella, che è terminata da tre linee rette, le quali fanno tra loro tre angoli. Le linee, che terminano un triangolo, chiamansi i *lati* di esso. Qualsivoglia di questi lati può chiamarsi *base* del triangolo, e allora gli altri due ritengono propriamente il nome di lati.

35 In ogni triangolo, come BAC (*Fig.* 19), prendendo qualsivoglia degli angoli di esso, come A, i due lati BA, CA, che formano quest' angolo, diconsi *contenerlo*, e il terzo lato BC dicesi *sottenderlo*. Diconsi ancora i due primi lati *aggiacenti* al detto angolo, e il terzo *opposto* al medesimo. E quando uno de' lati, come BC, si prenda per base, l' angolo A, che gli è opposto, chiamasi *angolo verticale*.

36 Un triangolo, che abbia i tre lati fra loro eguali, si dirà *equilatero*; uno, che ne abbia due soli eguali, *isoscele*; ed uno, che li abbia tutti e tre diseguali *scaleno*. A [*Fig.* 20] rappresenta un triangolo equilatero; B, B degli isosceli; C, C degli scaleni.

Pro-

Proprietà principali de' triangoli.

37 IN ogni triangolo rettilineo tutti e tre gli angoli presi insieme sempre sono eguali a due retti, cioè vagliono 180 gradi. Imperocchè se intenderemo per uno degli angoli del triangolo, come per B [*Fig.* 21], esser tirata una retta, parallela al lato opposto a quest' angolo [che è la linea punteggiata), è certo, che l' angolo C preso insieme coll' angolo totale, che risulta dai due B, A vale precisamente 180 gradi [articolo 27]. Dunque se in vece di A metteremo D, che è eguale ad A [articolo 26], avremo l' angolo C co i due B, D, tutti e tre insieme di 180 gradi.

38 Da ciò segue, che in ogni triangolo, prolungando qualsivoglia de' suoi lati, l' angolo *esterno*, che viene allora a formarsi fuori del triangolo, sempre sarà eguale a i due interni B, C, che sono dall' altra parte opposta a quella del prolungamento, e chiamansi *interni*, ed *opposti*. Perocchè se l' angolo D preso co i due B, C vale 180 gradi (articolo 37), e se lo stesso D preso col solo E val pure 180 gr. [articolo 17], è forza, che E solo vaglia quanto i due B, C.

39 Da ciò, che si è detto all' articolo 37, si raccoglie, che niun triangolo può avere più d' un angolo retto, ne più d' un ottuso, e avendone un ottuso, o un retto, avrà necessariamente gli altri due acuti; che se altrimente fosse, sarebbero tutti e tre gli angoli di esso maggiori di due retti. Ciò posto, se un triangolo rettilineo avrà un angolo retto, come A [*Fig.* 22], lo chiameremo *rettangolo*, ovvero *ortogonio*; se un ottuso, come B, *ottusangolo*, o *ambligonio*; se tre acuti *acutangolo*, oppure *osigonio*, come C.

40 Se una retta linea DF [*Fig.* 23], cadendo sopra un' altra GH, farà i due angoli aggiacenti *a*, *b* obbliqui, e preso nella DF qualsivoglia punto, come F, da esso cadià sopra la GH la retta perpendicolare FH, è evidente, che questa cadià dalla parte dell' angolo acuto *b*, non dall' ottuso *a*, altrimente il triangolo FDH, che viene a formarsi, avrebbe un angolo retto, [cioè quello, che fa la perpendicolare in H], e un ottuso; il che è impossibile [articolo 39].

 De'

De' triangoli equiangoli.

41 SE due triangoli avranno due de' loro angoli eguali, come l' angolo *g* [*Fig.* 24] all' angolo *e*, e l' angolo *h* all' angolo *d*, anco il terzo angolo *i* sarà eguale al terzo *f*: imperocchè tanto i tre *g*, *h*, *i* quanto i tre *d*, *e*, *f* debbono [articolo 37] far la stessa somma di 180 gr. Due triangoli pertanto, che abbiano gli angoli eguali nel modo, che si è detto, si diranno *equiangoli*. E quì è manifesto, che se in un triangolo *d e f*, si tirerà una retta *o m* parallela ad uno de' lati *d e*, essendo l' angolo, *m o f* eguale al *d*, e l' angolo *f m o* all' *e* (articolo 25), i triangoli *f m o*, *f e d* saranno equiangoli.

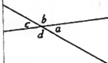
42 In qualsivoglia triangolo rettangolo ABC (*Fig.* 25) se dall' angolo retto ABC cadrà sul lato opposto ad esso AC la perpendicolare BD, che divida il detto triangolo ne' due triangoli ABD, BDC, ciascuno di questi sarà equiangolo a tutto il triangolo ABC. Imperocchè l' angolo retto ABC del triangolo ABC sarà eguale al retto BDC del triangolo BDC, e l' angolo BCA del primo triangolo non solo è uguale, ma l' istesso coll' angolo DCB del secondo. Dunque anco il terzo angolo BAC del primo triangolo sarà eguale al terzo angolo DBC del secondo (articolo 41), e i triangoli saranno equiangoli. E nell' istesso modo si proverà, che il triangolo ABC è anco equiangolo all' altro ABD; da chè segue ancora, che i due triangoli BDC, BDA sono equiangoli fra loro.

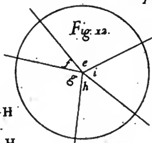
Della corrispondenza de' lati, e degli angoli nel triangolo.

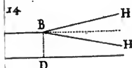
43 IN niun triangolo un solo lato può pareggiare gli altri due presi insieme, ma sempre sarà minore di essi. Come nel triangolo ABC (*Fig.* 26) per quanto sia lungo il lato AC, non arriverà ad eguagliare la somma degli altri due AB, BC; essendo evidente, che da A in C la strada più breve è la retta AC, non l' obbliqua ABC.

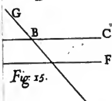
44 Se nelle due estremità D, E (*Fig.* 27) d' una retta DE si faranno due angoli acuti eguali fra loro HDE, GED,

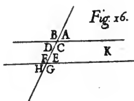
le

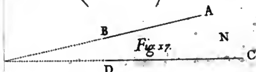

Fig. 11.
b
c
a
d

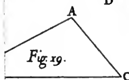

Fig. 12.
f
e
i
g
h


14.
B
H
H
D


G
B
C
F
Fig. 15.

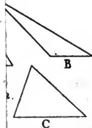

Fig. 16.
B A
D C
F E
H G
K


A
B
N
Fig. 17.
C
D

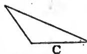

A
Fig. 19.
C

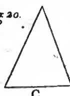

A


B


B
C


B


C


Fig. 20.
C


NAPOLI
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III

le rette HD, GE, che fanno questi angoli colla DE, prolungate finchè s' incontrino nel punto F, riuscirанno eguali, come FD, FE; non potendosi immaginare ragione alcuna, per cui l' una di esse debba riuscir maggiore dell' altra; e perciò in ogni triangolo, che abbia due angoli eguali fra loro, anco i lati opposti a questi angoli saranno eguali.

45 All' incontro se un triangolo avrà due lati fra loro eguali, gli angoli opposti ad essi saranno eguali. Sia il triangolo GHI (*Fig.* 28) co i lati GH, GI eguali. Qualunque sia la grandezza dell' angolo I opposto ad uno di essi, cioè al GH, se vorremo tirare per lo punto H una retta, che faccia con IH un angolo eguale a I, dico, che questa sarà la stessa HG; poichè se ella potesse essere un' altra, come HK, la quale facesse l' angolo KHI eguale all' angolo I, anco il lato HK verrebbe eguale al lato KI [articolo 44], e perciò siccome IK con KG, cioè tutta la IG, è eguale ad HG, così HK con KG sarebbe eguale ad HG, il che è impossibile (per l' articolo 43); attesochè nel triangolo HKG i due lati HK, KG debbono sempre esser maggiori del terzo HG. Onde è manifesto, che ogni triangolo isoscele ha due angoli aggiacenti alla base eguali fra loro, e per conseguenza acuti [articolo 39], ed ogni equilatero ha tutti e tre gli angoli eguali; cioè anch' essi acuti [articolo 39], e ciascuno di gradi 60; giacchè tutti e tre insieme ne fanno 180 [articolo 37].

46 In ogni triangolo, in cui un lato sia maggiore d' un altro, come HI (*Fig.* 29) maggiore d' IL, anche l' angolo HLI opposto al primo sarà maggiore dell' angolo IHL opposto al secondo; imperocchè se s' intenderà presa la parte IK eguale ad IL, e tirata la retta LK, l' angolo IKL, che sarà esterno rispetto al triangolo HKL, sarà maggiore del solo interno H [articolo 38]. Ora l' angolo ILK è eguale a IKL; perocchè i lati IL, IK sono eguali (articolo 45); dunque anche l' angolo ILK è maggiore di H. Tanto più dunque tutto ILH sarà maggiore del medesimo H.

47 All' incontro se in un triangolo si saprà, che un angolo sia maggiore di un altro, dovrà dirsi, che il lato opposto a quello sia maggiore del lato opposto a questo; che altrimente se i detti lati fossero eguali, gli angoli sarebbero eguali [arti-

[articolo 45], e se il primo lato fosse minore dell' altro, anche l' angolo opposto al primo sarebbe minore dell' altro, di cui si suppone maggiore [articolo 46]. E quindi è, che in ogni triangolo ottusangolo, in cui già sappiamo, che l' angolo ottuso è il maggiore [articolo 39], anco il lato opposto all' angolo ottuso sarà sempre il maggiore; e per l' istessa ragione in ogni triangolo rettangolo l' *ipotenusa*, che così chiamano il lato opposto all' angolo retto, sarà sempre maggiore di ciascuno de' *cateti*, o *perpendicoli*, che sono i lati, che comprendono l' angolo retto.

48 Quindi si raccoglie, che di tutte le rette linee, che da un punto E (*Fig.* 30) possono tirarsi ad una medesima retta HF, la più breve è la perpendicolare EF. Imperocchè tirando qualsivoglia altra linea come EH, ne nascerà sempre un triangolo rettangolo EHF, di cui EH sarà ipotenusa, e perciò maggiore di EF [articolo 47]. Per questa cagione la perpendicolare EF, che da un punto, come E, tirasi sopra una retta, come FH, dicesi la distanza di quel punto da questa retta; dovendosi tal distanza misurare appunto per la più brieve.

Comparazioni diverse de' triangoli.

49 QUando due triangoli rettilinei si paragonano insieme, accade spesse volte, che dall' egualità d' alcuni de' loro lati, o de' loro angoli si possa venire in cognizione dell' egualità degli altri lati, e degli altri angoli senza misurarli. Il primo caso dunque è, quando ne' due triangoli ABC, *abc* [*Fig.* 31] si sappia, che due lati dell' uno, come BA, AC sieno eguali a' due lati dell' altro, come *ba*, *ac*; ciascuno a ciascuno, e di più gli angoli A, et *a* compresi da questi lati sieno eguali; imperocchè è manifesto, che in tal caso se il triangolo *bac* si mettesse sopra il BAC adattando il punto *a* in A, e la retta *ab* sopra AB, anco la retta *ac* si adatterebbe sopra AC, e ciascun lato, ed angolo del triangolo *abc* sopra ciascun lato, ed angolo dell' altro, e perciò ciascuna parte dell' uno si troverebbe eguale a ciascuna parte dell' altro; avvertendo di paragonar sempre quelle parti, che si corrispondono, cioè la base *bc* colla BC, e l' angolo *c*,

che

che è l' oppoſto al lato *a b*, coll' angolo C, che è l' oppoſto al lato AB eguale ad *a b* &c. Ed è anco evidente, che tutto lo ſpazio del triangolo *a b c* s' adatterà preciſamente ſopra tutto lo ſpazio del triangolo ABC; onde i triangoli ſteſſi, non che i loro lati, et angoli, ſaranno eguali,

50 Il ſecondo caſo è quando ſi ſappia, che due angoli del primo triangolo ſieno eguali a' due del ſecondo, come il B al *b*, ed il C al *c*, ed in oltre il lato BC, a cui i detti angoli ſono aggiacenti, ſia eguale al *b c*, a cui ſono aggiacenti gli altri, che corriſpondono a i primi. Perciocchè anco in queſto caſo portando un triangolo ſopra l' altro, con mettere il punto B ſopra *b*, e il C ſopra il *c*, è evidente, che i triangoli s' adatteranno inſieme, e nel tutto, e in ciaſcuna delle loro parti; onde ſi conchiuderà, come prima &c. Anzi è da avvertire, che quando due angoli B, C ſono eguali a due *b*, *c*, e di più un lato, che non ſia aggiacente a i detti angoli, ma l' oppoſto ad uno di eſſi, come AB oppoſto a C, ſia eguale al corriſpondente *a b*, ne ſeguirà nulladimeno l' iſteſſo; perocchè ſe i due angoli B, C ſono eguali a' due *b*, *c*, è forza, che anco il terzo A ſia eguale al terzo *a* (articolo 41); onde i lati BA, *b a*, che ſi ſuppongono eguali ſaranno ſempre gli aggiacenti ad angoli eguali, e il caſo ſarà l' iſteſſo, che quello di prima.

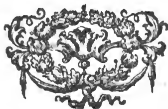
51 Il terzo è quando ſi ſappia, che i tre lati (*Fig.* 32) AB, BC, CA ſieno ſeparatamente eguali alli tre *a b*, *b c*, *c a*. Perocchè non è poſſibile porre il triangolo BAC ſopra *b a c* mettendo il punto *a* ſopra A, e il *c* ſopra C, ſenza che le altre parti s' adattino inſieme, e in conſeguenza ſi trovino eguali. E che ciò ſia vero, s' intendano due circonferenze di circolo, che paſſino per lo punto B, delle quali una BG abbia il centro in C, e l' altra BH lo abbia in A. E' certo, che quando ſi ſarà adattato, come ſopra, il lato *a c* al lato AC, l' eſtremo *b* della linea *a b* dovrà trovarſi in un qualche punto della circonferenza BH, di cui A è il centro; perocchè *a b*, ſi ſuppone eguale al ſemidiametro di queſta circonferenza AB; è anche certo, che l' eſtremo *b* della linea *c b* dovrà trovarſi in un qualche punto della circonferenza BG, di cui C è il centro; giacchè *b c* ſi ſuppone eguale a BC ſemidiametro di queſta circonferenza. E finalmente è certo, che il punto, in

cui

cui dee trovarsi il punto *b* dee esser un solo. Se dunque egli dee esser un solo, e trovarsi nulladimeno su tutte e due le circonferenze BG, BH, è forza, ch' egli si trovi in B, dove queste circonferenze s' incontrano. Se dunque *b* si trova in B, e già *a* si è collocato in A, e *c* in C tutti gli angoli di due triangoli, e tutt' i triangoli stessi si adattano insieme. Dunque &c.

52 Il quarto caso è, quando si sappia, che due lati dell' uno (*Fig.* 33) AB, AC sieno (come nel primo caso) eguali a due dell' altro *a b*, *a c*, e di più ne' triangoli vi sia un altro angolo eguale, ma non [come allora] il compreso da' lati eguali, ma l' opposto ad uno di questi, cioè a quello, che corrisponde in ambedue i triangoli; come se l' angolo C, che è opposto al lato AB fosse eguale al *c*, opposto al lato corrispondente *a b*. In questo caso però se l' angolo noto sarà opposto al lato più piccolo per poter conchiudere, che i triangoli abbiano le altre parti eguali, e sieno eguali fra loro, vi vuole una condizione di più, cioè che l' altro angolo B, opposto all' altro de' suddetti lati sia della medesima specie del suo corrispondente *b*, cioè, o sieno amendue ottusi, o amendue retti, o acuti. Imperocchè è da osservare, che ritenendo l' istesso angolo *c* l' istesso lato *a c*, e l' istessa lunghezza del lato *a b*, può darsi che si facciano due diversi triangoli diseguali fra loro nel tutto, e nelle altre parti. In fatti se dal centro *a* col semidiametro *a b* fosse descritta una circonferenza di circolo, che tagliasse di nuovo la retta *b c* nel punto *d*, e si tirasse la retta *d a*, ecco che il triangolo *a c d* avrebbe l' istesso angolo *c* del triangolo *a c b*, avrebbe l' istesso lato *a c*, ed avrebbe il lato *a d* dell' istessa lunghezza di *a b*, e pure avrebbe le altre parti, cioè gli altri angoli, e il terzo lato di diversa misura di quelli del triangolo *a c b*. Ben è vero, che siccome la detta circonferenza non può tagliare la retta *b c*, che al più in un solo punto diverso da *b*, cioè in *d* [come per se stesso è manifesto], così ritenendo l' angolo *c*, e il lato *a c*, un solo triangolo, cioè *a c d*, può farsi, che abbia l' altro lato *a d* della stessa lunghezza di *a b*, e che tuttavia sia diverso da *a b c*; e questo triangolo *a c d*, non può mai avere l' angolo *a d c* dell' istessa specie dell' *a b c*; perocchè essendo *a b d* isoscele, e gli

gli angoli *adb*, *abd* eguali (articolo 45), *adb* sarà sempre acuto [articolo 39], e *adc* diverso di specie da *abc*; giacchè due angoli aggiacenti non possono essere della medesima specie (articolo 18); posto dunque, che i lati AB, AC sieno eguali a i lati *ab*, *ac*, e che l'angolo C sia eguale al *c*, e finalmente, che ambedue gli angoli B, *b* sieno d'una medesima specie, verbigrazia acuti, (come nella figura) dico, che questi triangoli hanno tutte le altre parti eguali, e sono essi medesimi fra loro eguali. Imperocchè portando il triangolo *acb* sopra ACB col mettere il punto *a* in A, e il *c* in C, la retta *cb* giacerà su la estensione della CB [a cagione degli angoli *c*, C eguali], e la retta *ab* non potrà cadere, che sopra AB; perchè sebbene a riguardo della sua lunghezza potrebbe anco cadere in AD (supposto che D sia il punto, ove una circonferenza descritta col centro A, e col raggio AB taglia la retta CB), non potrà tuttavia cadere in questa situazione a riguardo dell'angolo *b*, che si suppone acuto, che non può adattarsi all'ADC, il quale dee esser ottuso, cioè di specie diversa dall'ABC, come poc'anzi dell'angolo *adc*, si è dimostrato. Onde rimane, che *ab* si adatti a AB, e tutte le parti del triangolo *abc* a tutte quelle del triangolo ABC, e perciò sieno eguali &c.



LIBRO III.

Delle figure di quattro, e di più lati.

53 LE figure terminate da quattro linee rette, che comprendono fra loro quattro angoli, si chiamano *quadrilateri*, o *quadrangoli*, e le linee, che le terminano, *lati*, ognuno de' quali si può prendere per base.

54 *Lati aggiacenti* d'un quadrilatero sono quelli, che comprendono uno degli angoli di esso, e *lati opposti* quelli, che non ne comprendono alcuno. Quando i lati opposti sono paralleli fra loro a due a due, il quadrilatero si chiama un *parallelogrammo*, come A, A (*Fig.* 34); quando non sono paralleli a due a due, *Trapezio*, come B, B, B.

55 Quando un parallelogrammo abbia un angolo retto, come D (*Fig.* 35), è manifesto, che avrà retti anco gli altri F, G, E, dovendo, per cagione delle parallele (articolo 26), i due interni della istessa parte esser sempre eguali a' due retti; perciò un parallelogrammo, che abbia un angolo retto chiamasi un *rettangolo*, come DEFG; che se di più avrà tutti e quattro i suoi lati eguali, dirassi un *quadrato*, come H (*Fig.* 36).

56 Se poi un parallelogrammo non avrà gli angoli retti, ma tuttavia avrà i quattro lati eguali, si chiamerà *rombo*, come I [*Fig.* 37], e se non avendo gli angoli retti, ne pure i quattro lati non saranno uguali, *romboide*, come K (*Fig.* 38).

57 Una linea retta tirata da un angolo d'un parallelogrammo all'angolo opposto, si chiama *diametro*, o *diagonale* di quel parallelogrammo, come AB (*Fig.* 39) ovvero CD.

Proprietà de' Parallelogrammi.

58 IN qualsivoglia parallelogrammo tirata, che sia una diagonale, è manifesto, che l'angolo *a* (*Fig.* 40) sarà eguale al *d* (articolo 26), e il *c* eguale al *b*. Dunque ne' due triangoli HLN, HMN abbiamo due angoli eguali a' due an-

goli,

goli, e il lato HN aggiacente ad essi, comune all'uno, e all'altro triangolo, e perciò (articolo 50) il terzo angolo L sarà eguale al terzo M, ed il lato LN al lato HM, e il lato HL al lato MN, e finalmente tutto il triangolo HLN a tutto il triangolo HMN. Generalmente dunque la diagonale divide in due parti eguali il parallelogrammo; e i lati opposti di ciascun parallelogrammo, come pure gli angoli opposti, sono per necessità sempre eguali.

59 All'incontro se due linee parallele, ed eguali HL, MN si congiungeranno nelle loro estremità, con due rette linee HM, LN, ancor queste saranno parallele, ed eguali, e formeranno insieme colle prime un parallelogrammo. Imperocchè tirata la retta HN ne' due triangoli HLN, HMN, l'angolo *a* sarà eguale al *d* (articolo 26), e il lato HL è già eguale ad MN, e finalmente HN è lato comune all'uno, e all'altro triangolo; onde abbiamo quanto basta a conchiudere (per l'articolo 49), che le parti corrispondenti di questi triangoli sieno eguali, cioè il lato HM al lato LN, e l'angolo *c* all'angolo *b*; i quali due angoli essendo alterni, le rette HM, NL, saranno parallele (articolo 27).

60 Per maggior facilità da quì avanti esprimeremo i parallelogrammi per due sole lettere, cioè per quelle, che denotano due de' suoi angoli opposti. Così quando diremo il parallelogrammo ML, ovvero HN, intenderemo il parallelogrammo HLNM.

61 Se in un parallelogrammo qualunque si sia, come AD (*Fig.* 4), intenderemo tirata una diagonale AD, e preso in questo qualsivoglia punto, come E, immagineremo, che per questo punto passino due rette una parallela a i lati BD, AC, la quale sia HEF, ed un'altra parallela a i lati AB, CD, la quale sia IEG; avremo diviso il parallelogrammo AD in quattro parallelogrammi, due che saranno intorno alla suddetta diagonale, cioè AE, ED, e due altri per li quali non passerà la diagonale, cioè CE, EB, questi due ultimi si chiamano i *complementi*; e tutta la figura composta de' due complementi, e di uno de' parallelogrammi posti intorno alla diagonale, chiamasi *gnomone*, come IEHBDCI.

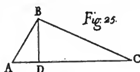
62 I due complementi sono sempre eguali fra loro: impe-

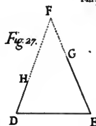
rocchè se da' due triangoli ABD, ACD, che sono eguali [articolo 58), leveremo i due AHE, AIE parimente eguali (articolo 58), ed anco i due EGD, EFD pure eguali [articolo 58], è forza, che le due figure, che rimangono, cioè i due complementi EB, CE sieno eguali.

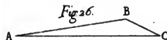
De' parallelogrammi, e de' triangoli di eguale altezza.

63 A*Ltezza d' un parallelogrammo*, diceſi quella retta linea, che determina la diſtanza delle parallele, che coſtituiſcono due de' lati oppoſti di quel parallelogrammo, la qual retta (articolo 21) s' intende dover eſſer perpendicolare ad una delle ſuddette parallele, e per conſeguenza anco all' altra (articolo 37); e dovunque ſi tiri, o dentro, o fuori del parallelogrammo, ſempre è dell' iſteſſa lunghezza [articolo 22]. Così ciaſcuna delle rette (*Fig.* 42) AB, KN, IL ſarà l' altezza del parallelogrammo CD, che ha due de' ſuoi lati ſulle parallele AI, BL, la diſtanza delle quali vien miſurata dalle ſuddette rette AB &c. Quindi è, che quando il parallelogrammo, di cui ſi tratta, ſia un rettangolo, come NG, i medeſimi lati di eſſo, come GH, KN, ne ſono l' altezza. E' dunque manifeſto, che tutt' i parallelogrammi, che abbiano due de' loro lati ſulle medeſime parallele, come CD, NG, AL &c. avranno l' iſteſſa altezza. L' altezza poi d' un triangolo è la diſtanza d' uno de' lati d' eſſo dalla retta parallela a queſto tirata per l' angolo oppoſto. Come nel triangolo FEM (*Fig.* 43) tirando per l' angolo EFM una retta FV parallela al lato EM, oppoſto a queſt' angolo, la diſtanza di queſta parallela ST, FO &c. ſarà l' altezza del triangolo FEM. Onde tutt' i triangoli, come EFM, PRQ &c., che abbiano un lato ſulla ſteſſa retta EQ, e l' angolo oppoſto ad eſſo ſulla medeſima retta VR parallela ad EQ, avranno la ſteſſa altezza &c.

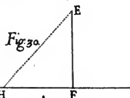
64 Se ſopra la baſe AB (*Fig.* 44) ſarà un parallelogrammo AD, e prolungato il lato CD oppoſto a queſta baſe, come in DF, da i punti AB verranno due altre parallele AE, BF, che facciano un altro parallelogrammo AF, il quale abbia la ſteſſa altezza, cioè ſtia fra le medeſime parallele col primo, queſti due parallelogrammi AD, AF, ſaranno eguali fra loro.

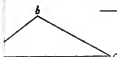

B
Fig. 25.
A
D
C

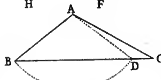

F
Fig. 27.
G
H
D
E

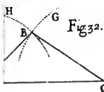

Fig. 26.
B
A
C

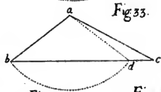

29.
I
L

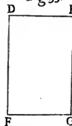

E
Fig. 30.
H
F


b
c


A
B
D
C


H
G
Fig. 32.
B
C


a
Fig. 33.
b
d
c


Fig. 35.
D
E
F
G

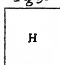
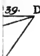
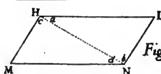

Fig. 36.
H


Fig. 37.
I




39.
D


H
c
a
L
Fig. 40.
d
b
M
N

loro. Imperocchè essendo CD eguale ad AB [articolo 58], ed anco EF eguale ad AB (articolo 58), saranno eguali CD, EF. Dunque aggiungendo all' una, ed all' altra la stessa retta DE, sarà CD con DE, cioè CE, eguale a EF con DE, cioè a DF. Per altro l' angolo FDB è eguale all' angolo ECA (articolo 25), ed il lato DB al lato CA (articolo 58). Dunque ne' due triangoli FDB, ECA abbiamo quanto basta per conchiudere, che sono eguali fra loro (articolo 49), e perciò levando d' amendue il triangolo bianco DIE, ed aggiugnendo ad amendue il triangolo segnato in croce AIB, le due figure, che ne risulteranno, cioè i parallelogrammi AD, AF, saranno eguali.

65 E' evidente, che prolungando la retta AB, come in H, se da' punti E, F verranno due altre linee parallele EG, FH terminate alla retta AH, il parallelogrammo FG sarà eguale al parallelogrammo AF, col quale ha comune la base EF, ed è fra le medesime parallele; e che questo parallelogrammo FG avrà il lato GH eguale ad EF (articolo 58), cioè ad AB. Ma il parallelogrammo AF si è mostrato eguale all' AD; dunque o siavi, o non vi sia il parallelogrammo AF, i due parallelogrammi FG, AD, che hanno le basi HG, AB eguali, e sono fra le stesse parallele CF, AH sono eguali.

66 E perchè due triangoli, come ABC (*Fig.* 45), GHE, che abbiano le basi AB, GH eguali poste sulla stessa retta AH, e che terminino co i loro vertici C, ed E alla stessa retta CE parallela ad AH, sono ciascuno di essi [articolo 58] la metà d' un parallelogrammo AD, GF, che ha l' istessa base col triangolo, ed è compreso fra le istesse parallele con esso, siccome questi parallelogrammi AD, GF si sono mostrati eguali (articolo 65), così i triangoli ABC, GHE saranno eguali. Tanto più è manifesto ciò succedere quando i triangoli non siano sopra basi diverse, ed eguali, ma sulla stessa base comune, e siano, come sopra terminati alla stessa parallela, come i triangoli EGH, IGH.

67 All' incontro se due triangoli posti sopra l' istessa base, o sopra basi eguali situate nella medesima retta, come GEH, GIH, oppure GEH, ACB, si troveranno eguali, la retta, che passa per li loro vertici E, I, ovvero C, E sarà parallela alla linea delle basi, e il medesimo vale di due parallelogrammi.

mi. Altrimente se CE non fosse parallela ad AH, si potrebbe tirare per E, ovvero per C un'altra retta, come CP, parallela alla suddetta AH, la quale incontrando una delle linee GE, HE, come in P, compito il triangolo GPH questo sarebbe eguale al triangolo ACB (articolo *66*), il quale si suppone eguale al triangolo GEH; onde GPH, ed EGH sarebbero eguali, cioè il tutto eguale a una delle sue parti: il che è impossibile.

De i quadrati fatti su i lati de' triangoli rettangoli.

68 IN qualsivoglia triangolo rettangolo, come AGF (*Fig.*46), se sopra l'ipotenusa AF, si descriverà un quadrato AFSE, e dall'angolo retto del detto triangolo AGF, si tirerà la retta GC parallela al lato AE del detto quadrato, il rettangolo AC, ch'essa formerà dentro il quadrato dalla parte dell'angolo GAF, sarà eguale al quadrato AMOG, che ha per base il lato GA del detto triangolo aggiacente al detto angolo GAF. Imperocchè prolungate le rette CG, MO, finchè s'incontrino in R, e prolungata parimente EA, finchè incontri MOR in P, essendo, che l'angolo PAF, aggiacente al retto EAF, è anch'egli retto [articolo *16*], e parimente l'angolo MAG è retto, saranno eguali gli angoli PAF, MAG, e toltone il comune PAG, resteranno GAF, PAM eguali. Ne' triangoli dunque GAF, PAM, che hanno eguali i suddetti angoli, ed anco i due AGF, PMA [amendue retti], ed hanno inoltre eguali i lati AG, AM aggiacenti a questi angoli, sarà (articolo 50) la base PA eguale alla base AF, cioè ad AE. Poichè dunque i due parallelogrammi AR, AC, sono fra le stesse parallele, ed hanno le basi AP, AP eguali; saranno tra loro eguali (articolo *65*). Ma il parallelogrammo AR è eguale al quadrato AO, col quale ha comune la base AG, ed è fra le medesime parallele (articolo *64*); dunque anco il parallelogrammo rettangolo AC sarà eguale al quadrato AO.

69 E perchè per la medesima ragione si mostrerà essere il rettangolo FC (*Fig.*47) eguale al quadrato FN, che si farebbe sopra l'altro lato GF del medesimo triangolo rettangolo, ne segue, che in qualsivoglia triangolo rettangolo il quadrato

fatto

fatto sopra l'ipotenusa sia eguale alla somma de' due quadrati fatti sopra i due perpendicoli, o cateti.

De' poligoni, cioè delle figure di più lati.

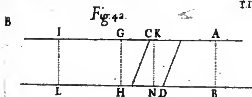
70 LE figure comprese da maggior numero di lati, che quattro chiamansi generalmente *poligoni*. Se sono comprese da cinque lati, diconsi *pentagoni* (*Fig.* 48) (A), se da sei *esagoni* (B), se da sette *ettagoni* (C), se da otto *ottagoni* (D), se da nove *enneagoni* (E), se da dieci *decagoni* (F), e così degli altri. Quando una figura ha tutt' i lati eguali, e tutti gli angoli eguali chiamasi *regolare*, o *ordinata*, altrimente dicesi *irregolare*. Così un triangolo equilatero sarà figura regolare (articolo 45), e parimente lo sarà un quadrato (articolo 63).

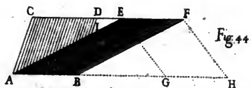
71 Abbiamo veduto, che gli angoli di qualsivoglia triangolo, presi insieme, sono eguali a' due retti (articolo 37); egli è anco manifesto, che quelli di qualsivoglia quadrilatero, come ABCD (*Fig.* 49), sono uguali a' quattro retti; perchè sono eguali a quelli di due triangoli BAD, BCD, ne' quali si può risolvere il quadrilatero col tirare per due degli angoli opposti la retta DB. Aggiungeremo ora per regola generale, che in tutt' i poligoni per sapere a quanti angoli retti equivagliano gli angoli loro, basta raddoppiare il numero de' lati del poligono, e da questo doppio levar sempre quattro, che così resterà il numero, che si cerca. Così nell' ettagono, o figura di 7 lati, raddoppiando 7, che fa 14, e levandone 4, resterà 10; onde concluderemo, che gli angoli tutti d'un ettagono presi insieme vagliano dieci retti, o gradi 900. La ragione di questa regola è, perchè preso dentro la figura data, qualsisia punto, come H (*Fig.* 50), e fatto sopra ciascun lato di essa un triangolo, che abbia il vertice in H, il numero di questi triangoli sarà eguale a quello de' lati della figura, e il numero degli angoli retti di essi triangoli sarà doppio dal detto numero. Ma perchè fra gli angoli de' suddetti triangoli entrano anche quelli, che sono intorno al punto H, i quali per non essere nella periferia della figura non debbono mettersi in conto, e questi sono sempre (articolo 20) eguali a' 4 retti,

ti, si dovranno levare dal detto numero questi 4 retti, e il rimanente sarà il numero de' retti, che sono eguali a quelli della figura. Dacchè poi segue, che ove la figura sia regolare, dividendo il numero così trovato in tante parti eguali, quanti sono gli angoli di essa, si avrà il valore di ciascuno degli angoli. Con questa regola è stata fatta la seguente tavola, la quale può continuarsi ancora per qualsivoglia poligono di maggior numero di lati.

Poligoni regolari.	*Valore di tutti gli angoli del Poligono.*	*Valore di ciascun angolo del Poligono.*
Triangolo equil.° 3 *angoli.*	2 *retti* *gr.* 180.	*gr.* 60.
Quadrato 4 *angoli.*	4 *retti* *gr.* 360.	*gr.* 90.
Pentagono 5 *angoli.*	6 *retti* *gr.* 540.	*gr.* 108.
Esagono 6 *angoli.*	8 *retti* *gr.* 720.	*gr.* 120
Ettagono 7 *angoli.*	10 *retti* *gr.* 900.	*gr.* $128\frac{4}{7}$.
Ottagono 8 *angoli.*	12 *retti* *gr.* 1080.	*gr.* 135.
Enneagono 9 *angoli.*	14 *retti* *gr.* 1260.	*gr.* 140.
Decagono 10 *angoli.*	16 *retti* *gr.* 1440.	*gr.* 144.

L I.


Fig.42.
B
I
G
C K
A
L
H
N D
B


C
D
E
F
Fig.44.
A
B
G
H

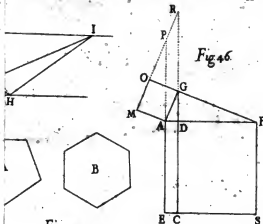

R
P
I
Fig.46.
O
G
H
M
A
D
F
B
E C
S

Fig.48.


D
E
F

LIBRO IV.

Del circolo.

72 UNa retta linea, che tocchi un circolo senza entrarci dentro ne dall' una, ne dall' altra parte, come in A (*Fig.* 51), chiamasi *tangente* di quel circolo. Il toccamento, come è manifesto, non si fa, che in un punto, e la tangente lascia subito il circolo di quà, e di là dal contatto.

73 Quando due circoli si toccano, o al di dentro, come in B (*Fig.* 52), o al di fuori, come in C, senza tagliarsi, diconsi *tangenti*. Anche questa sorta di contatto non si fa, che in un solo punto, e i circoli si scostano immediatamente fra loro. Due circoli, che si tocchino, non possono avere lo stesso centro, e la retta, che passa per li loro centri, passa eziandio per lo punto del contatto. Parimente due circoli, che si taglino, non possono avere lo stesso centro, ne possono tagliarsi, che in due punti.

74 Una retta tagliando un circolo in due punti, lo dividerà in due parti; le quali, quando la retta non sia un diametro, saranno disuguali, e chiamansi *segmenti*, de' quali uno sarà maggiore del semicircolo, come A (*Fig.* 53), e l' altro minore, come B. La retta CD, che forma questi segmenti, e ne è base, dicesi *corda*, o *sottesa* d' amendue gli archi, ch' essa separa.

Proprietà delle corde, o sottese.

75 QUalsivoglia sottesa, come DE [*Fig.* 54] vien divisa per metà dalla perpendicolare FG tirata dal centro F dal circolo sopra di essa. Poichè supponendosi retti i due angoli in G, ed essendo per altro eguali gli angoli FDE, FED, a cagione delle rette FD, FE eguali (articolo 45), avremo ne' due triangoli FDG, FEG, che hanno inoltre il lato comune FG, quanto basta (articolo 52) per conchiudere eguali i loro lati DG, GE. E all' incontro è facile il mostrare, che se una retta, che venga dal centro, taglierà per mezzo la corda di

un arco, la taglierà ad angoli retti; e se una retta taglierà una corda ad angoli retti, e in parti eguali ella passerà per lo centro.

76 Anzi perchè ne' suddetti due triangoli FGE, DFG saranno anche eguali gli angoli DFG, EFG (articolo 49), prolungata la retta FG in H fino alla periferia del circolo, saranno per necessità eguali gli archi DH, EH (articolo 13). E tirate le rette HE, HD, i triangoli DFH, EFH avranno due lati eguali coll' angolo compreso eguale, onde le basi HE, HD saranno eguali; e perciò ad archi eguali di un medesimo circolo corrispondono corde eguali, e all' incontro a corde eguali facilmente si vede, che converranno archi eguali &c.

77 Niuna corda può mai essere eguale al diametro del circolo, ma sempre ne è minore, essendo chiaro, che la corda, verbigrazia DE è minore (articolo 43) dei due lati DF, FE, che presi insieme costituiscono la lunghezza d' un diametro.

78 Se dal centro A (*Fig.* 55.) preso sulla circonferenza d' un circolo ABD, sarà descritto un altro circolo, che tagli il primo in B, D, e si tirerà la retta AB, che sarà la sottesa di due archi, ADB maggiore, ed ACB minore del semicircolo, è manifesto, che qualunque altra corda, come AC, che convenga all' arco AC minore di ACB resterà tutta dentro del circolo, che passa per BD, e perciò sarà minore di AB. Dunque generalmente quando si tratta d' archi minori del semicircolo, al diminuirsi l' arco si diminuisce la corda, e al contrario al diminuirsi la corda, si diminuisce l' arco. Ma quando si tratta d' archi maggiori del semicircolo all' accrescersi l' arco, si diminuisce la corda &c. Così pure è manifesto, che o sia l' arco maggiore, o minore del semicircolo crescendo l' arco, cresce il segmento del circolo; e o sia il segmento maggiore, o minore del semicircolo al crescere del segmento, cresce l' arco &c.

79 Se in un circolo saranno due corde eguali (*Fig.* 56) AB, CD, tirate le perpendicolari sopra di esse EH, EI dal centro E, e compiti i triangoli CED, BEA, le due HB, ID, saranno (articolo 75) metà di due linee eguali; e perciò eguali tra loro; ed essendo per altro gli angoli BHE, DIE retti, cioè eguali fra loro, e i semidiametri EB, ED eguali, e finalmente gli angoli IED, BEH dell' istessa specie, cioè acuti (articolo 39) necessariamente (per l' articolo 52) saranno egua-

li

li i lati EH, EI, cioè la distanza di esse corde dal centro del circolo. All' incontro se le distanze EH, EI fossero eguali, si proverebbero nel medesimo modo eguali le mezze corde HB, ID, e per conseguenza le rette BA, DC.

80 Se due corde GF, IK (*Fig.* 57.) d' un medesimo circolo, saranno parallele fra loro, è chiaro, che la distanza dal centro della corda IK, che conviene al minor arco IK, cioè la retta CM, è maggiore della retta CL, che è la distanza dal centro della corda GF, che conviene al maggior arco GF. Ma posto, che gli archi, IK, GF siano minori del semicircolo, la corda IK, che conviene al minor arco, e minore della GF, che conviene al maggior arco (articolo 78): dunque la distanza dal centro della corda minore è maggiore della distanza dal centro della corda maggiore. E perchè corde eguali hanno distanze eguali dal centro (articolo 79), ancorchè le corde non fossero parallele, sempre la minore, sarà la più distante dal centro. Così pure all' incontro, se la distanza CM si supporrà maggiore di CL, la corda IK si mostrerà minore di GF, o siano le corde parallele, o non lo siano.

Delle tangenti del circolo.

81 SE nell' estremità B (*Fig.* 58) di qualunque semidiametro CB, si tirerà la retta AB, perpendicolare al medesimo semidiametro, questa retta toccherà il circolo nel punto B. Imperocchè tirata dal centro qualsivoglia retta CE, che incontri AB in E, nel triangolo CEB l' ipotenusa CE sarà maggiore del semidiametro del circolo CB (articolo 47); e per conseguenza il punto E sarà fuori del circolo; e il medesimo, si mostrerà di tutt' i punti della retta AB, fuorchè del punto B. Dunque (articolo 42) questa retta tocca il circolo in B.

82 All' incontro se AB tocca il circolo in B, tirato il semidiametro CB, l' angolo CBA sarà retto; altrimente si potrebbe dal punto C tirar sopra AB una perpendicolare CE, diversa da CB, e nel triangolo CEB il perpendicolo CE, (che si suppone maggiore del semidiametro CB, per essere il punto E fuori del circolo) sarebbe maggiore dell' ipotenusa CB; il che è impossibile (articolo 47).

83 Fra la tangente del circolo F G (*Fig.* 59), e la periferia F H, non è possibile tirare una retta linea, che passi per lo punto del contatto F, ma tutte le linee, che si tireranno per questo punto, fuori che la tangente F G, entreranno necessariamente dentro il circolo. Sia a cagion d' esempio, la linea F K; se si pretende, che questa non entri dentro del circolo, ella lo toccherà in F [articolo 72], e perciò tirato il semidiametro L F, l' angolo L F K, sarà retto (articolo 82); ma anche l' angolo L F G è retto; dunque il tutto L F G è uguale alla parte L F K, il che è impossibile.

84 Due tangenti [*Fig.* 60] D B, D C dello stesso circolo, tirate da un medesimo punto D, saranno eguali tra loro. Imperocchè, tirati i semidiametri A B, A C, e la corda B C, poichè gli angoli A B D, A C D sono retti (articolo 82), e gli angoli A B C, A C B eguali (articolo 44), sottraendo questi da quelli, rimarranno D B C, D C B eguali, e per conseguenza le rette D B, D C saranno eguali [articolo 45].

Delle massime, e delle minime rette nel circolo.

85 PReso dentro un circolo qualsivoglia punto A (*Fig.* 61): di tutte le rette, che da questo punto possono tirarsi fino alla periferia del circolo, la massima è A B, che passa per lo centro del circolo C, e la minima è A D, che è in diritto della massima A B. Imperocchè tirata dal punto A qualsivoglia retta fino alla periferia, come A E, e congiunta E C, i due lati C A, A E saranno maggiori di C E (articolo 43), cioè di C D. Se dunque dalla somma di C A, A E si leverà C A, e da C D si leverà la stessa C A, rimarrà A E maggiore di A D, e perciò A D è la minima. Parimente C A, con C E, è maggiore di A E (articolo 43); ma C E è uguale a C B; dunque anche C A, con C B, cioè A B, è maggiore di A E; e perciò A B è la massima.

86 Preso fuori d' un circolo qualsivoglia punto D [*Fig.* 62]: di tutte le rette, che cadono da questo punto nel convesso della periferia, la minima è D F, che, prodotta, passerebbe per lo centro C. Imperocchè tirata al convesso suddetto qualsivoglia altra retta D G, e congiunta C G, è evidente, che D C è

minore

minore di DG con GC; dunque sottraendo da un canto, e dall' altro le rette eguali CF, GC, resterà DF minore di DG. Ma di tutte quelle, che dal punto D cadano nel concavo della periferia, la massima è DH, che passa per lo centro C. Perocchè tirando a questo concavo qualsisia altra retta DK, e congiunta CK, è evidente, che le due DC, CK, o quel, che è lo stesso, DC, CH, o sia la sola DH, sarà maggiore di DK.

Degli angoli al centro, e alla periferia.

87 SE nel centro A [*Fig.63*], d'un circolo, si farà un angolo BAC, che prenda un arco BEC, e in qualsivoglia punto del rimanente della periferia, come in D, si farà un altro angolo BDC, che prenda l'istesso arco BEC, tanto l'angolo BAC, quanto il BDC, si diranno *insistere all' arco* BEC; e tirata la corda BC, l'angolo BDC, si dirà nel *segmento* BDC.

88 Se un angolo fatto al centro, e un altro alla periferia insisteranno al medesimo arco, quello, che sarà al centro, sarà sempre il doppio di quello alla periferia. Perocchè primieramente se una delle linee, che comprendono l'angolo al centro, sarà ella medesima una di quelle, che comprendono l'angolo alla periferia, come nella (*Fig.64*), allora è manifesto, che l'angolo *a* esterno, essendo eguale a i due interni *c*, *b* [articolo 38], che sono eguali fra loro (articolo 44), sarà doppio dell' angolo *b*. 2. Se niuna delle linee, che fanno l'angolo al centro coincide con quelle, che lo fanno alla periferia, nè eziandio taglia queste linee, come nella figura 65; allora tirata dall' angolo, che è alla periferia, una retta per lo centro del circolo (che è la retta punteggiata) l'angolo *a* sarà doppio di *b*, come già si è mostrato nel primo caso, e per la medesima ragione *d* sarà doppio di *i*; dunque amendue, *a*, *d*, che presi insieme fanno l'angolo al centro, sono doppj di *b*, *i*, che presi insieme fanno l'angolo alla periferia. 3. Se una delle rette, che fanno l'angolo al centro, ne taglia una di quelle, che lo fanno alla periferia, come nella figura 66, allora tirata, come sopra, la linea punteggiata per li punti de' due angoli, l'angolo *a* sarà doppio di *c*,

come

come nel caſo primo, e per la medeſima ragione l' angolo intiero, che riſulta da' due *a*, *b*, ſarà doppio dell' angolo, che riſulta da' due *c*, *d*. Dunque il reſiduo *b*, ſarà doppio del reſiduo *d*.

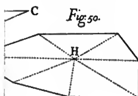
89 Da ciò ſegue, che tutti gli angoli alla periferia, i quali inſiſtono ad un medeſimo arco, cioè a dire tutti gli angoli, che ſono nell' iſteſſo ſegmento, ſono eguali tra loro; come (*Fig.* 67) B, C, D &c.; giacchè tutti ſono la metà dell' angolo al centro EAF. E per fare, che un angolo alla periferia ſia eguale ad un angolo al centro del medeſimo circolo, converrà, che quello alla periferia inſiſta ad arco doppio di quello, a cui inſiſte l' angolo al centro.

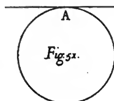
90 Poichè dunque tutti gli angoli nel medeſimo ſegmento ſono uguali, ciaſcun ſegmento di circolo è capace di un angolo di una determinata miſura, e non maggiore, ne minore; e poichè l' angolo nel ſegmento è metà dell' angolo al centro, che inſiſte a quell' arco, che manca al ſegmento per compire l' intero circolo; quindi è, che ſottraendo il numero de' gradi, minuti &c., che contiene un ſegmento, da gradi 360, e prendendo la metà del reſiduo, ſi avrà il numero de' gradi, e minuti &c., che miſurano l' angolo, di cui è capace quel ſegmento. E al contrario dato il numero de' gradi, minuti &c. d' un angolo fatto in un ſegmento, ſe il doppio di queſto numero ſi leverà da gradi 360, reſterà il numero de' gradi, minuti &c. del ſegmento, che capiſce quell' angolo.

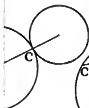
91 Tutt' i ſegmenti, che capiſcono angoli eguali, ancorchè appartengano a' circoli diverſi, e diſeguali, ſi chiamano *ſimili* fra loro. Ed è manifeſto, che i ſegmenti ſimili contengono un numero eguale di gradi, e minuti &c., raccogliendoſi ciò facilmente dall' articolo 90.

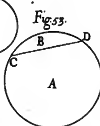
92 E' anco evidente, che quando il ſegmento, in cui è un angolo, ſia un ſemicircolo, come ACB, (*Fig.* 68) quell' angolo ſarà retto; quando ſia minore d' un ſemicircolo, ſarà ottuſo, come FGH (*Fig.* 69); e quando maggiore d' un ſemicircolo, ſarà acuto, come LMN (*Fig.* 70). Imperocchè, fatto ciò, che le figure dimoſtrano nel primo caſo gli angoli ACD, DCB ſaranno (articolo 88) metà de i due adjacenti AED, DEB, che ſono eguali a' due retti; e però tutto ACB

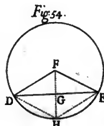
ſarà


C
Fig. 50.
H

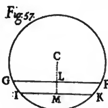

A
Fig. 51.

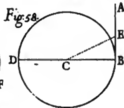

C

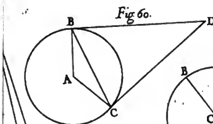

Fig. 53.
B
D
C
A

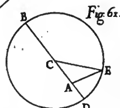

Fig. 54.
F
D
G
E
H


H
B
D


Fig. 57.
C
L
G
F
I
M
K


Fig. 58.
A
E
D
C
B


Fig. 60.
B
D
A
C


B
Fig. 61.
C
E
A
D

K G



farà eguale a un retto. Nel 2. caso per essere FKH maggiore del semicircolo, saranno i due FIK, KIH maggiori di 180 gradi, e in conseguenza i due FGI, IGH, metà di essi, cioè tutto l'angolo FGH, farà più di 90 gradi, cioè ottuso. E finalmente nel 3. caso, essendo LON minore di 180 gradi, e perciò l'angolo LPN minore anch'esso di 180, la metà di esso LMN farà minore di 90, cioè acuto.

93 Se sopra una medesima corda CD (*Fig.* 71) si faranno due angoli, uno nel segmento minore CAD, un altro nel maggiore CBD, è chiaro, che valendo ciascuno di essi la metà dell'arco, a cui insiste, tutti e due insieme valeranno la metà della circonferenza, cioè 180 gradi, e perciò saranno eguali a' due retti. Perciò quando anco non vi fosse la corda CD, ogni volta, che si darà un quadrilatero ACBD, di cui tutti e quattro gli angoli sieno alla periferia d'un medesimo circolo, i due opposti fra loro, come A, e B, presi insieme sempre valeranno due retti.

Degli angoli ne' segmenti alterni del circolo.

94 QUando una retta FEG (*Fig.* 72) tocca un circolo, e per lo punto del contatto E passa un'altra retta EH, che taglia il circolo, dividendolo in due segmenti EIH, ELH, ciascuno di questi segmenti, si chiama *alterno*, rispetto a quell'angolo, che si fa dalla tangente colla detta retta dalla parte opposta a quella, in cui è quel segmento; e così il segmento EIH, dicesi alterno, rispetto all'angolo HEF, e il segmento ELH, rispetto all'angolo HEG. Ora noi mostreremo, che ciascuno de' due angoli HEG, HEF è eguale all'angolo, di cui è capace il suo segmento alterno. Imperocchè tirata per E alla tangente FG la perpendicolare LE, la quale passerà necessariamente per lo centro del circolo (articolo 82), e congiunta LH nel triangolo LHE, l'angolo LHE, per essere nel semicircolo, farà retto (articolo 92). Dunque i due ELH, LEH valeranno un altro retto; giacchè tutti e tre vagliono due retti. Ma anche i due LEH, HEG, fanno un retto LEG; dunque è forza, che

che ELH, ſia eguale ad HEG. E però l'angolo HEG è uguale all'angolo, di cui è capace il ſuo ſegmento alterno ELH. Perchè poſcia gli angoli, de' quali ſono capaci i due ſegmenti ELH, EIH preſi inſieme, vagliono due retti (articolo 93), e ne più ne meno i due angoli adiacenti HEG, HEF vagliono due retti, e già l'angolo HEG, ſi è moſtrato eguale all'angolo del ſuo alterno ſegmento ELH, è forza, che anco l'angolo HEF, ſia eguale a quello del ſuo alterno ſegmento EIH.



LIBRO V.

Problemi elementari.

95 LE propofizioni matematiche, nelle quali fi efpone precifamente qualche proprietà, o affezione delle quantità, fi chiamano *teoremi*, come quefto: In ogni triangolo rettilineo due lati fono maggiori del terzo; o pur quefto: fra la tangente del circolo, e la periferia non è poffibile tirare una retta linea, ed altri fimili; e tali fono tutte quelle propofizioni, che finora abbiamo fpiegate.

96 Le altre poi, nelle quali s' infegna di determinare la mifura, o la pofizione di qualfivoglia quantità, vengono chiamati *problemi*, come quefto: fopra una data retta linea fare un quadrato; o quefto: divider un angolo in due parti eguali. E di quefte propofizioni fiamo per fpiegarne alcune nel prefente libro, cioè le più importanti, ed infieme le più facili; le quali non dipendono da altri teoremi, che da quelli, che fi fono fpiegati ne' quattro libri antecedenti.

97 Ma prima dimanderemo, come cofa affai facile per fe fteffa, e che non ha bifogno d' alcuno artificio geometrico, di poter tirare una retta linea da qualfivoglia punto dato a qualfivoglia altro punto dato.

98 Di più dato un punto per centro, ed una retta linea per femidiametro, di poter defcrivere da quel centro un circolo, che abbia il femidiametro eguale alla data retta linea.

99 E dato un punto di poter tirare per effo verfo qualunque parte una linea di lunghezza eguale ad una data.

100 E finalmente data una linea di poterla prolungare ad arbitrio, finchè fia eguale ad un' altra; oppure di poterne levar una parte eguale ad un' altra data minore di effa. Le quali cofe fuppofte fciorremo facilmente i feguenti problemi.

Problemi appartenenti alla divisione delle linee, e degli angoli.

101 DIvidere una retta data in due parti eguali. Sia la retta da dividere AB (*Fig.* 73). Dal punto A, come centro, col semidiametro AB, si descriva il circolo CBD; quindi da B, come centro, col medesimo semidiametro si descriva un altro circolo CAD, i quali due circoli si tagliano in C, D, e tirisi la retta CD, che tagli AB in E. Dico, che AB restarà divisa in parti eguali nel punto E. Imperocchè tirate le rette AC, BC, AD, BD, saranno queste tutte eguali fra loro, per essere tutte semidiametri dell' uno, e dell' altro circolo, ed eguali al semidiametro AB. Dunque ne' due triangoli CAD, CBD tutt' i lati sono eguali, ed in conseguenza anche l' angolo ACD eguale all' angolo BCD (articolo 51). Ora ne i triangoli ACE, BCE, essendo eguali i lati AC, CB, ed EC comune, e finalmente essendosi mostrati gli angoli ACE, BCE eguali, le basi AE, BE (articolo 49) saranno per necessità eguali; onde la retta AB sarà divisa in parti eguali nel punto E.

102 Dividere un angolo rettilineo dato in due parti eguali. Sia l' angolo da dividere GFH (*Fig.* 74). Si descriva dal punto F, come centro, con qualsivoglia lunghezza di semidiametro, un arco di circolo IH, che tagli le rette, che comprendono il dato angolo ne i punti I, H; e tirata la retta HI questa si divida a mezzo in K (articolo 101), e congiungasi KF. Ne i due triangoli FKI, FKH, essendo per la costruzione eguali i tre lati a' tre lati, gli angoli IFK, HFK (articolo 51) saranno eguali; e perciò l' angolo GFH verrà ad essere diviso per metà dalla retta KF, il che era da fare.

Problemi, che riguardano le perpendicolari, le parallele, e gli angoli eguali.

103 PEr un punto dato in una retta tirare ad essa una perpendicolare. Sia la retta AB (*Fig.* 75), e il punto in essa C, per cui convenga tirare una perpendicolare alla retta

retta AB. Si prendano di quà, e di là dal punto C due linee eguali fra loro, e di qualsivoglia lunghezza, amendue sopra la retta AB, prolungata ove faccia il bisogno, e sieno CB, CD. Quindi col centro B, e col semidiametro BD, si descriva il circolo DE; e col centro D, e col semidiametro DB, si segni parimente il circolo BE. Sia il punto E uno di quelli ne' quali si tagliano i detti due circoli, e si tiri la retta EC. Dico che questa è la perpendicolare cercata. Ciò è manifesto; perocchè i triangoli ECB, ECD hanno per la costruzione, e per l'articolo 101, i tre lati eguali, e perciò gli angoli ECB, ECD [articolo 51] saranno eguali; onde, essendo essi aggiacenti, saranno retti [articolo 16]. Altro modo. Sia il punto dato A (*Fig.* 76) nella retta AC. Prendasi fuori di essa un punto qualunque D, e congiunta DA, si descriva dal centro D per A il circolo ACE, che tagli AC in C, e congiunta CD, si prolunghi fino al circolo in E, e congiungasi AE. L'angolo CAE sarà retto per essere nel semicircolo, e però EA sarà perpendicolare ad AC.

104 Da un punto dato fuori di una retta tirare sopra di essa la perpendicolare. Sia la data retta AB (*Fig.* 77), e fuori di essa il punto H, da cui convenga tirare una perpendicolare sopra AB. Dal centro H si descriva un circolo AFI di qualunque grandezza siasi, purchè tagli la retta AB in due punti, al qual fine dovrà questa retta, ove faccia bisogno prolungarsi. Siano i punti delle due sezioni A, I; dividasi AI in parti eguali nel punto K (articolo 101), e congiungasi KH. Poichè dunque KH passa per lo centro del circolo AFI, e divide la corda AI in parti eguali, la dividerà ad angoli retti (articolo 75), e perciò sarà perpendicolare sopra la data retta BA.

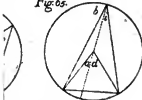
105 Dato in una retta un punto tirar per esso una linea, che faccia con quella un angolo eguale a un dato. Sia data la retta AB (*Fig.* 78, e 79), ed in essa il punto C. Sia anche dato l'angolo D, e convenga tirare per lo punto C una retta, che faccia con AB un angolo eguale all'angolo D. Dal punto D, come centro descrivasi un arco di circolo, la cui porzione EF resti compresa fra le linee, che comprendono l'angolo D, e tirisi la retta EF. Quindi da C, come centro, coll' intervallo CH, eguale a DE, descrivasi l'arco di circolo HKG, e da H, come centro, con un semidiametro eguale ad EF, de-

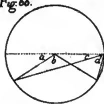
ſcrivaſi un altro arco di circolo I K, il quale tagli l' arco HKG in K; e finalmente ſi congiungano KC, KH. Dico, che la retta KC ſarà colla retta AB nel punto C l' angolo KCH, che ſarà eguale al dato angolo D. Il che è manifeſto per l' articolo 51, eſſendo per la coſtruzione i tre lati del triangolo HCK eguali a' tre lati del triangolo EDF, e per conſeguenza gli angoli D, e C eguali.

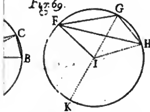
Nella pratica gli angoli retti ſi tirano con quell' iſtrumento, che diceſi ſquadro, o norma, e gli angoli d' altra miſura, ſi fanno mediante un ſemicircolo diviſo in gradi, e parti di gradi; ma ſiccome queſta diviſione non ſi può fare con regola geometrica, ma ſolo meccanicamente, e coll' andare tentando il determinare i punti preciſi delle diviſioni, così abbiamo dovuto inſegnare di far gli angoli eguali a' dati con regola geometrica nel precedente problema, ſenza biſogno d' alcuno iſtrumento.

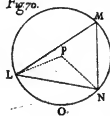
106 Tirare per un dato punto una retta parallela ad una data. Sia il punto dato L (*Fig.* 80) per cui debbaſi tirare una parallela alla linea data MN. Si tiri per L la retta LO, che incontri la retta MN in O, e faccia con eſſa i due angoli LON, LOM. Quindi (per l' articolo 105) pel punto L della retta LO, tiriſi la retta LP, che faccia l' angolo OLP eguale all' angolo LON in modo, che queſti angoli ſiano alternamente ſituati, riſpetto alla linea LO, cioè la retta LP ſi tiri alla ſiniſtra di LO, ſe NOL ſarà alla deſtra, ed al contrario &c. Dico, che LP è parallela alla data retta MN. Il che è manifeſto per la coſtruzione, e per l' articolo 28.

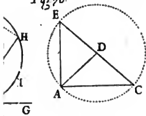
107 Per un punto dato fuori di una retta tirarne un' altra, che vada a fare con quella un angolo eguale a un dato. Sia dato il punto A (*Fig.* 81) fuori della retta BC, e convenga per A tirare una retta, che faccia con BC in quel punto, in cui l' incontrerà un angolo eguale al dato angolo D. Si tiri prima per A (articolo 106) la retta AF parallela a BC, e poſcia pel punto A della retta AF tiriſi la retta AH [articolo 105], che faccia con AF l' angolo HAF eguale al dato D. Prolunghiſi finalmente AH, finchè incontri in E la retta BC (prolungata anch' eſſa ove biſogni); è manifeſto, che la retta AE ſarà con BC l'angolo AEB eguale (articolo 26) all'angolo HAF, cioè al dato D. *Pro-*

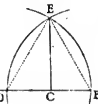

Fig. 65.
b
a
c
d

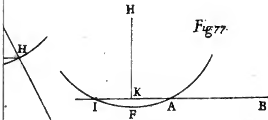

Fig. 66.
a
b
c
d


Fig. 69.
F
G
H
I
K


Fig. 70.
M
P
L
N
O


Fig. 76.
E
D
A
C


Fig. 75.
E
A
D
C
B


H
Fig. 77.
K
I
F
A
B

Problemi, che appartengono a' triangoli.

108 Sopra una data retta fare un triangolo equilatero. Sia la retta data (*Fig.* 82) AB. Descrivasi dal centro A col semidiametro AB il circolo BC, e dal centro B col medesimo semidiametro AB il circolo AC, i quali circoli si taglino in C; e si congiungano AC, BC. E' manifesto, che il triangolo ACB sarà quello, che si cerca.

109 Date tre rette linee fare un triangolo, che abbia ciascun lato eguale a ciascuna di esse. Sieno le tre linee (*Fig.* 83) AB, CD, EF, e convenga fare un triangolo, i cui lati sieno eguali a queste linee. Dall' estremità B dell' una di esse descrivasi un circolo con semidiametro eguale alla retta CD; e dall' altra estremità A della medesima un altro circolo con intervallo eguale alla terza EF. Si taglino questi circoli in G, e si congiungano BG, AG. E' manifesto, che il triangolo AGB sarà quello, che si domanda. Avvertasi, che quando i circoli così descritti non si tagliassero in alcun punto, il problema non potrebbe sciorsi; e ciò accaderebbe quando le tre linee date fossero tali, che due qualunque di esse non fossero maggiori della terza; perocchè in tal caso sappiamo non potersi da tali linee fare un triangolo in virtù di quello, che si dimostrò di sopra coll' articolo 43. Tal caso si vede nelle tre rette (*Fig.* 84) *ab*, *cd*, *ef*, fra le quali le due *cd*, *ef*, prese insieme, non sono maggiori della terza *ab*.

110 Sopra una data retta linea fare un triangolo equiangolo a un dato. Sia la retta DE (*Fig.* 85), sopra cui convenga fare un triangolo equiangolo al dato triangolo ABC. Si tiri per uno de' due estremi della data retta, come per D, la retta FD, che faccia con DE l' angolo FDE eguale a quello, che si vuole de' tre angoli del triangolo ABC, come all' angolo B. Parimente per l' altro estremo E si tiri EF, che colla retta ED faccia l' angolo FED eguale a qualsivoglia altro degli angoli del dato triangolo, come al C; e queste due linee DF, EF si incontrino nel punto F. E' dunque manifesto, ch' essendo per la construzione i due angoli D, ed E eguali a' due B, C, anco il terzo angolo F del triangolo FED sarà

farà eguale al terzo A del triangolo ABC (articolo 41); onde i triangoli faranno equiangoli.

Problemi, che appartengono a' parallelogrammi, e all' egualità delle figure.

111 SOpra una data retta linea descrivere un quadrato. Sia la data retta AB [*Fig.* 86]. Si tirino le due perpendicolari AC, BD (articolo 193), e si faccino eguali alla retta AB, e congiungasi CD. Poichè dunque le rette AC, BD sono eguali, e parallele per la construzione, sarà AD un parallelogrammo [articolo 59], il quale avendo i lati opposti AB, CD eguali (articolo 58), ed essendo i due lati AC, BD eguali ad AB per la construzione, saranno tutti e quattro i detti lati eguali, e tutti gli angoli saranno retti; poichè lo sono i due A, B (articolo 55); dunque AD sarà un quadrato (articolo 55).

112 Dato un triangolo fare un parallelogrammo eguale ad esso, e che abbia un angolo uguale a un dato angolo. Sia dato il triangolo ABC (*Fig.* 87), a cui convenga fare un parallelogrammo eguale, il quale abbia inoltre uno de' suoi angoli eguali all' angolo dato H. Dividasi a mezzo uno de' lati del triangolo, come AB, nel punto D, e congiunta DC si tiri la FD, la quale faccia con DB l'angolo FDB eguale al dato angolo H. Quindi tirata per l'angolo C, opposto al lato AB, la retta CG parallela a questo lato, e che tagli DF in F, si compisca il parallelogrammo FDBG. E' manifesto, che questo parallelogrammo per essere sopra la istessa base DB, e fra le stesse parallele DB, CG col triangolo CDB, sarà doppio di questo triangolo, perciocchè egli sarà eguale al parallelogrammo KD, che si farebbe sulla stessa base, e tra le medesime parallele [articolo 64], il quale [per l'articolo 58] sarebbe doppio del detto triangolo CDB. Ma anco il triangolo ACB è doppio del triangolo medesimo CDB; attesochè le basi AD, DB de' due triangoli ADC, DCB sono eguali, e la loro altezza è la medesima [articolo 66]: dunque il parallelogrammo FDBG, e il triangolo ACB sono eguali, e l'angolo del parallelogrammo FDB è eguale al dato angolo H: il che era da fare.

113 All' incontro se si dovesse fare un triangolo eguale a un dato parallelogrammo, e che avesse un angolo eguale a un dato angolo, è manifesto, che dovrebbe prendersi per lo triangolo doppia base di quella del parallelogrammo, e fare il rimanente, come nel precedente articolo. E in fine se convenisse fare un triangolo eguale ad un altro triangolo, o un parallelogrammo eguale ad un altro parallelogrammo con un angolo eguale a un dato, dovrebbe prendersi l' istessa, o egual base, come è manifesto per gli articoli *64*, *65*, e *66*.

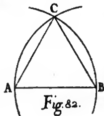
114 Fare un parallelogrammo eguale a un dato triangolo, o parallelogrammo, e che abbia un angolo eguale a un dato angolo, e di più abbia per uno de' suoi lati una data retta linea. Sia la retta linea OS [*Fig.*88.], sulla quale debba farsi un parallelogrammo, che sia eguale alla figura GKP posta fra le parallele KP, GM, o sia questa un triangolo, o un parallelogrammo, e che inoltre abbia uno de' suoi angoli eguale all' angolo T. Facciasi prima il parallelogrammo IM tra le parallele suddette, il quale sia eguale alla data figura, ed abbia l' angolo IPM eguale al dato angolo T, e ciò per gli articoli 112, o 113. Quindi prolunghisi la retta SO in R, finchè OR sia eguale alla base IP del parallelogrammo IM, e tirisi la retta CO, che con OR faccia l' angolo COR eguale all' angolo MPI [articolo 105], cioè all' angolo T. Prendasi poscia OC eguale a PM, altro lato del parallelogrammo IM, e per C tirisi BCQ parallela ad ROS, come pure per S tirisi QSL parallela a COF, e per R si tiri parimenti ARB parallela a queste due linee; e congiunta QO si prolunghi, finchè incontri BRA in A, e finalmente per A si tiri AFL parallela ad ROS. Ciò fatto sarà AQ un parallelogrammo diviso in quattro parallelogrammi dalle due rette RS, FC, che passano per lo punto O della diagonale QOA, e per conseguenza i due complementi OL, OB saranno eguali fra loro (articolo 62). E perchè OB facilmente si conosce esser eguale per la costruzione al parallelogrammo IM, cioè alla data figura KGP, anco il parallelogrammo OL sarà eguale a questa figura, ed avrà per uno de' suoi lati la data retta OS, e di più l' angolo FOS (articolo 19) eguale all' angolo ROC, o all' angolo IPM, cioè al dato angolo T. Il che era da fare.

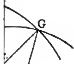
115

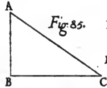
115 Sopra una data retta linea fare un parallelogrammo, che abbia un angolo eguale a un dato angolo, e che sia eguale a una data figura rettilinea di qualsivoglia numero di lati. Da uno degli angoli della figura data si tirino a tutti gli altri angoli della medesima delle linee rette, le quali divideranno la figura in tanti triangoli, che sieno [*Fig.* 89] A, B, C, D, e più se ve ne fossero. Sia ora data la retta EF, sulla quale debba farsi il parallelogrammo eguale alla detta figura, che abbia un angolo eguale a un dato angolo. Tirisi la retta EG, che faccia con FE nel punto E l'angolo FEG della data misura [articolo 105], e sopra di FE facciasi (articolo 114) il parallelogrammo EH eguale ad uno de' suddetti triangoli; e che abbia per uno de' suoi angoli l'angolo FEG. Parimente sopra la retta IH, che è il lato opposto ad EF, facciasi nell' angolo HIG un altro parallelogrammo HL eguale ad un altro de' triangoli della figura, e coll' istesse regole si proceda, finchè vi hanno in questa de' triangoli. E' manifesto, che la figura la quale risulterà finalmente, come EFOP sarà un parallelogrammo, che avrà un angolo eguale al dato, avrà per uno de' suoi lati la data retta EF, e finalmente sarà eguale alla figura data. Se in vece, d' un parallelogrammo si volesse un triangolo eguale ad una data figura, e che avesse un angolo eguale a un dato, e finalmente avesse per uno de' suoi lati la data retta EF, si dovrebbe far prima sopra questa retta il parallelogrammo EO colle suddette condizioni, come ora si è mostrato, e quindi prolungata EG in Q, finchè PQ fosse eguale a EP, e tirata QF il triangolo EQF sarebbe quello, che soddisferebbe alla questione; come è manifesto per le cose dette all'articolo 112.

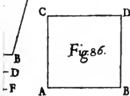
116 Data una figura rettilinea fare un quadrato eguale ad essa. Se la figura data non fosse un rettangolo, si trasmuti prima in rettangolo, cioè facciasi sopra una retta di qualsivoglia lunghezza un parallelogrammo, che abbia un angolo retto, e sia eguale alla data figura [articolo 115]. Sia dunque il rettangolo AC (*Fig.* 90) dato, o fatto eguale alla figura data. Si prolunghi il lato AD, che suppongo essere il minore de' due aggiacenti, fino in F, talchè tutta AF sia eguale al lato maggiore AE. Divisa poscia AF in due parti eguali nel

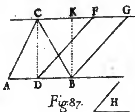
M O N
Fig. 80.
L
B E C
H
A F
Fig. 81.
D

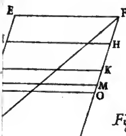


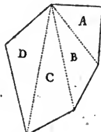














nel punto K, col centro K descrivasi un circolo col semidiametro K A, il qual circolo passerà per lo punto F, e prolunghisi C D, finchè incontri in G la periferia A G F. Tirata finalmente A G, dico, che se sopra questa retta, si farà il quadrato A P, questo sarà eguale al rettangolo A C. Imperocchè essendo A G F un semicircolo, se si tirerà F G, l'angolo F G A sarà retto [articolo 92], e perchè A F è uguale ad A E, compito il parallelogrammo E F, il quale si suppone aver l'angolo A retto, sarà E F il quadrato dell' ipotenusa A F del triangolo rettangolo A G F. Dunque poichè dall'angolo retto A G F è tirata la retta G C parallela al lato A E di questo quadrato, il rettangolo A C, ch' essa taglierà nel detto quadrato, è uguale al quadrato A P fatto sopra il lato A G del triangolo rettangolo A G F [articolo 68]. Si è dunque fatto il quadrato A P eguale al dato rettangolo A C, cioè alla data figura rettilinea, il che era da fare.

117 Dati due quadrati farne un altro eguale alla somma di ambedue. Il lato C D [*Fig.* 91] dell' uno de' due quadrati si prolunghi in F tanto, che D F sia eguale ad H I lato dell' altro quadrato, e congiungasi E F. Se sopra questa retta E F si farà il quadrato, è manifesto (articolo 69), che egli sarà eguale alla somma de' due quadrati delle rette E D, D F, cioè delle rette E D, H I, che sono i due quadrati dati. Il che era da fare. Da ciò si vede, come si possa fare un quadrato doppio d' un altro. Come per far un quadrato doppio del quadrato E C [*Fig.* 92], si prolungherà C D in F, tantochè D F sia eguale a D C, cioè ad E D, e congiunta E F, è manifesto, che il quadrato di questa sarà eguale a' due quadrati di E D, e di D F, i quali essendo fra essi eguali, sarà il quadrato di E F doppio del quadrato di E D, cioè doppio del quadrato E C.

118 Dati tre, o più quadrati farne un altro eguale alla somma di essi. Facciasi prima (articolo 117) un quadrato F H (*Fig.* 93) eguale a' due de' dati A, B; quindi prolungando un lato H G del quadrato F H in D tanto, che D G sia eguale al lato del terzo quadrato C, congiungasi F D. E' manifesto, che il quadrato di F D sarà eguale a' due quadrati di G D, e di F G, cioè (per la costruzione) a' tre quadrati dati C, B, A. Nel medesimo modo si procederebbe, se i dati fossero più di tre.

119 Dati due quadrati farne un altro eguale alla differenza di quelli. Sieno i due quadrati (*Fig. 94*) K, M, e vogliasene un altro, che sia eguale alla loro differenza, cioè a dire a quello spazio, che resterebbe levando il quadrato M dal quadrato K, che suppongo essere il maggiore de' due. Sopra un lato del quadrato K descrivasi il semicircolo PTR (il che si fa dividendo a mezzo questo lato, e dal mezzo, come centro descrivendo un circolo, che abbia per raggio la metà del medesimo lato); quindi da uno de' due estremi del lato PR, come da R descrivasi un arco di circolo col semidiametro TR eguale al lato del quadrato M, il quale arco tagli il semicircolo PTR in T, e congiungasi TP. Dico che il quadrato, che si farà sopra la retta PT sarà quello, che si cerca. Imperocchè essendo l'angolo PTR nel semicircolo, sarà retto (articolo 92); onde il quadrato dell'ipotenusa K sarà eguale a i quadrati de' due lati PT, TR (articolo 69); ma il quadrato di TR è per la construzione eguale al quadrato M; dunque il quadrato K è eguale alla somma del quadrato M col quadrato di PT, e perciò levando dal quadrato K il quadrato M la differenza, che resta, sarà eguale al quadrato di PT; il che era da fare.

Problemi appartenenti al circolo.

120 DAto un arco di circolo trovarne il centro. Sia dato l'arco di circolo DCE (*Fig. 95*), di cui convenga trovare il centro. Si prendano sul dato arco tre punti ad arbitrio, come D, C, E, e congiunganfi le rette DC, CE, ciascuna delle quali si divida per metà ne' punti F, I, e per essi si tirino ad elle le perpendicolari FK, IK, le quali concorrono in K. Dico, che il punto K è il centro del dato circolo. Imperocchè questo centro dee trovarsi certamente nella retta FK, la quale divide per metà, e ad angoli retti la corda DC; e per la stessa ragione dee trovarsi nella retta IK, che divide nell'istesso modo la corda CE (articolo 75). Dunque è forza, che il centro sia nel punto K, che è il solo punto comune ad ambedue le rette FK, IK.

121 Descriver un circolo, che passi per tre punti dati.

Sieno

Sieno nella medesima figura dati i tre punti E, C, D, per li quali debba farsi passare una circonferenza di circolo. Si congiungano CE, CD: di poi fatta la medesima costruzione dell' articolo antecedente, si incontrino le rette IK, FK nel punto K; e dal centro K si descriva un circolo, che passi per uno de' tre punti dati, come per C. Dico, che il medesimo circolo passerà ancora per gli altri due punti dati D, E. Imperocchè tirate le rette KC, KE vedesi facilmente per la costruzione esservi ne' triangoli KCI, KEI un lato eguale, ed uno comune, e l'angolo compreso da questi lati in amendue i triangoli esser retti. Dunque (articolo 49) le basi KE, KC sono eguali, ed essendo K centro e KC semidiametro del circolo, che passa per C, è manifesto, che il medesimo circolo passerà anco per E. Nel medesimo modo proverassi, che il detto circolo passa anco per lo terzo punto dato D.

122 Per un dato punto sulla periferia d'un circolo tirare a questa la tangente. Sia il punto dato B [*Fig.* 96]; si trovi il centro del circolo (articolo 120), che sia A, e tirisi il semidiametro BA, su cui pel punto B si conduca la perpendicolare DBC (articolo 103). E' manifesto, che questa toccherà il circolo nel punto B per l'articolo 81.

123 Dato un punto fuori del circolo tirare ad esso una tangente. Sia dato il punto C [*Fig.* 97] fuori del circolo BD, il cui centro sia E. Congiungasi EC, e sopra di essa facciasi il semicircolo EDC, che tagli il circolo dato in D. Tirisi il semidiametro ED, e la retta CD. L'angolo dunque CDE sarà retto [articolo 92], e la retta CD toccherà il circolo BD in D (articolo 81); il che era da fare.

124 Divider un arco di circolo in due parti eguali. Dagli estremi A, B [*Fig.* 98] dell'arco da dividersi si tirino i semidiametri BC, AC, e dividasi per metà l'angolo BCA (articolo 102) per la retta DC, la quale tagli il circolo ne' punti D, E. E' manifesto, che se l'arco dato è minore del semicircolo, come ADB, la retta DC, che divide egualmente l'angolo ACB, divide eziandio egualmente in D l'arco ADB. Se poi è maggiore, come AEB, il prolungamento CE della suddetta retta, dividerà quest'arco per metà in E; perchè essendo eguali gli angoli DCB, DCA, anco i loro aggiacenti

 BCE,

BCE, ACE faranno eguali (articolo 16), e perciò gli archi BE, AE faranno anch' essi eguali.

125 Dato un circolo tirare da un dato punto della periferia una retta, che ne tagli un segmento, che capisca un angolo eguale a un dato. Sia il circolo ACB (*Fig.* 99), e il punto sulla periferia B. Si tiri per B la tangente EB, e nel punto B di questa tirisi la retta AB, che faccia l' angolo EBA, eguale al dato, e tagli il circolo nel punto A. E' dunque manifesto, che il segmento ACB, che è alterno rispetto all' angolo EBA, sarà capace di un angolo eguale all' angolo EBA (articolo 94), cioè uguale al dato: il che era da fare.

126 Data una retta linea fare sopra di questa un segmento di circolo, che capisca un angolo eguale a un dato. Sia la data retta AB [*Fig.* 100]. Per uno degli estremi di essa A si tiri la retta AC, che faccia l' angolo BAC eguale al dato; e sopra la retta AC per lo punto A si alzi la perpendicolare AD. Poscia per lo altro estremo B della data retta si tiri BE, che faccia l' angolo EBA eguale all' angolo DAB, che la detta perpendicolare comprende colla data retta AB. Sia il punto E, quello in cui si incontrino le rette EB, DA. E poichè gli angoli EAB, EBA si sono fatti eguali, faranno i lati EA, EB eguali; onde un circolo descritto col centro E, e col semidiametro AE passerà per lo punto B. Descrivasi un tal circolo, e sia ABF. Dico, che il segmento di questo AFB, che è posto alternativamente rispetto all' angolo BAC, è quello, che si domanda. Imperocchè essendo EA semidiametro del circolo, e l' angolo EAC retto, la retta AC toccherà il circolo in A. L' angolo dunque CAB sarà eguale all' angolo, di cui è capace l' alterno segmento AFB (articolo 94). Ma il detto angolo CAB è eguale al dato per la construzione; dunque il segmento AFB, fatto sopra la data retta AB è capace d' un angolo eguale al dato. Il che era da fare. Questo problema medesimo può enunciarsi anche in altri termini, cioè: data una retta fare sopra di essa un segmento di circolo simile a un dato segmento; giacchè segmenti simili si chiamano quelli, che sono capaci d' angoli eguali, come si è detto all' articolo 91.

127 Dato un circolo descrivere un triangolo equiangolo a un

un dato, e che abbia ciaſcuno de' ſuoi angoli ſulla periferia del circolo. Tiriſi per qualſivoglia punto D (*Fig.* 101) della data periferia una tangente EDF; poſcia per lo punto del contatto D ſi tiri la retta GD, che colla tangente faccia l'angolo EDG eguale ad uno degli angoli del triangolo dato, come al C. Parimente per D ſi tiri un'altra retta DH, che faccia colla tangente l'angolo HDF eguale ad un altro degli angoli del dato triangolo, come al B; e per li punti G, H, ne' quali le rette GD, HD tagliano il circolo, ſi tiri GH. Poichè dunque all'angolo EDG è eguale quello, che è nell' alterno ſegmento GHD (articolo 94), e parimente all'angolo FDH quello, che è nel ſegmento DGH, e ciaſcuno de' due EDG, HDF è uguale per la coſtruzione a ciaſcuno de' due C, B, il triangolo GDH avrà due angoli eguali a' due angoli del triangolo ABC, e per conſeguenza anche il terzo angolo GDH ſarà eguale al terzo BAC (articolo 41): onde il triangolo GDH avrà i ſuoi angoli alla periferia del dato circolo, e ſarà equiangolo al triangolo BAC; il che era da fare.



LI.

LIBRO VI.

De' principj universali delle matematiche, o della dottrina delle proporzioni; delle quantità commensurabili, e incommensurabili.

128 MIsura è una quantità, che o presa una sol volta, o replicata alcune volte ne uguaglia precisamente un' altra del medesimo genere. La quantità misurata dicesi *moltiplice* della sua misura secondo quel numero, per cui resta misurata, come doppia, tripla &c., e la misura chiamasi, secondo il medesimo numero, *summultiplice* di quella, come sudduplа, suttripla &c., che dicesi ancora la metà, la terza, la quarta parte &c.

129 Due quantità diseguali d' un medesimo genere si diranno *commensurabili*, quando si possa trovare una terza quantità, che sia misura comune di amendue, cioè, che presa un numero di volte ne misuri una, e presa un altro numero di volte misuri l' altra. Quando niuna comune misura potrà trovarsene, si chiameranno *incommensurabili*. Non dee recar maraviglia, che si diano delle quantità incommensurabili. Imperocchè potendosi ogni quantità intender divisa in infinito, si possono concepire in essa delle parti minori di qualsivoglia quantità per noi assegnabile. Se dunque saranno due quantità, delle quali la massima comune misura sia minore di qualsivoglia quantità di quel genere per noi assegnabile, niuna comune misura di esse potrà mai assegnarsi, ne ritrovarsi, onde queste due quantità saranno incommensurabili. In fatti si dimostra, che tali sono il lato di qualsivoglia quadrato, e la diagonale di questo; il lato del triangolo equilatero, e il perpendicolo, che cade da un angolo di esso sul lato opposto, e moltissime altre linee.

130 Ogni quantità si dice *esprimersi* per quel numero, che dimostra, come essa si commisuri ad un' altra quantità del medesimo genere, la quale prendesi per l' unità, e si esprime per lo numero 1. Così perchè il numero 7 dimostra, come

una

Fig. 91.

Fig. 92.

Fig. 93.

Fig. 94.

Fig. 97.

Fig. 100.

Fig. 101.

una linea di sette palmi si commisuri con un palmo, il numero 7 dirassi esprimer una linea di sette palmi; supponendo, che il palmo si prenda per l'unità. E perchè il numero $\frac{3}{4}$ dimostra, come una linea lunga tre quarte parti d'un palmo si commisuri con esso, perciò preso il palmo per 1, il numero $\frac{3}{4}$, si dirà esprimere la detta linea. E perchè il numero $2\frac{5}{6}$ dimostra, come una linea lunga due palmi, con di più cinque seste parti d'un palmo si commisuri con esso; perciò il numero $2\frac{5}{6}$ dirassi esprimere la detta linea, preso sempre il palmo per l'unità.

131 Da ciò è manifesto, che ogni quantità eguale a quella, che prendesi per l'unità, si esprime per lo numero 1. Che ogni quantità maggiore di quella, che si prende per l'unità, e moltiplice di questa, si esprime per quel numero intero, che dimostra quante volte ella sia misurata dall'unità; come il 7 nel primo esempio dell'articolo 130. Che ogni quantità minore dell'unità, e commensurabile ad essa si esprime per un numero rotto, il cui denominatore mostra quante volte una qualche misura comune ad essa, e all'unità misuri l'unità; e il numeratore dimostra quante volte la stessa misura comune misuri la quantità da esprimersi; come $\frac{3}{4}$ nel secondo esempio del detto articolo. Che ogni quantità maggiore dell'unità, e commensurabile ad essa, ma non moltiplice, si esprime per un numero composto d'intero, e rotto; de' quali l'intero mostra quante volte si contenga in essa l'unità; e il rotto ha per denominatore il numero, che dimostra quante volte una qualche misura comune ad essa, e all'unità misuri l'unità; ed ha per numeratore il numero, che dimostra quante volte questa medesima misura comune misuri il residuo della quantità da esprimersi, come $2\frac{5}{6}$ nel 3. esempio del detto articolo. Che finalmente niuna quantità incommensurabile con quella, che si prende per unità si può esprimere con alcun numero, e perciò le quantità incommensurabili diconsi ancora *irrazionali*, siccome le commensurabili *razionali*.

Di'

De' numeri irrazionali, o ſordi, e come per eſſi ſi eſprimono le quantità incommenſurabili.

132 UN numero il qual ſia noto per qualche ſua proprietà, che lo ſpecifichi, e lo deſtingua da tutti gli altri, ma che tuttavia non poſſa eſprimerſi con alcun numero finito di figure aritmetiche, chiamaſi irrazionale, o ſordo.

Così quel numero, la cui proprietà ſia queſta: che moltiplicandolo per ſe medeſimo produca preciſamente il numero 2, viene per queſta proprietà baſtantemente ſpecificato, e diſtinto da tutti gli altri numeri, non potendo eſſervene, che un ſolo, che abbia tale proprietà. Ma perchè ſi moſtra nell' aritmetica, che un tal numero è un intero con di più una certa frazione, la quale non può eſprimerſi per alcun numero finito di caratteri; perciò diraſſi irrazionale, o ſordo. Si trova, che queſto numero è maggiore di 1, ed è minore di $1\frac{1}{2}$; e ſi poſſono anco aſſegnare de' limiti più vicini, fra quali egli debba reſtar compreſo, come a dire, ch' egli è maggiore di $1\frac{4}{10}$, e minore di $1\frac{5}{10}$; e di nuovo è maggiore di $1\frac{41}{100}$, e minore di $1\frac{42}{100}$; e parimente maggiore di $1\frac{414}{1000}$, e minore di $1\frac{415}{1000}$ &c.; ma la preciſa quantità di eſſo allora ſolo potrebbe eſprimerſi quando ſi poteſſe eſprimere una frazione d' un numero infinito di figure nel numeratore, e d' un altro numero infinito nel denominatore.

Parimente quel numero, che riſulterebbe, ſe dall' unità ſi levaſſe un terzo di eſſa, e al reſiduo ſi aggiugneſſe un quinto, e da queſto rimanente ſi toglieſſe un ſettimo, e al reſiduo ſi aggiungeſſe un nono, e col medeſimo ordine ſi proſeguiſſe in infinito, quel numero dico, che riſulterebbe dopo queſte infinite ſottrazioni, e addizioni, non può certamente eſſere, che un ſolo, e per queſta proprietà, che ſi è detta, egli è baſtantemente diſtinto da tutti gli altri numeri, e poſſono anche aſſegnarſi de' limiti, dentro de' quali egli reſti compreſo; ma perchè è impoſſibile eſprimerlo con un numero finito di figure aritmetiche, e ſolamente ſi eſprimerebbe con una frazione

zione

zione di numeratore, e di dominatore infinito; perciò egli ſarà numero irrazionale, o ſordo.

133 Le quantità incommenſurabili, delle quali abbiamo di ſopra parlato, con quella, che ſi prende per unità, benchè, come ſi è detto (articolo 131), non ſi poſſano eſprimere per numeri razionali, però poſſono eſprimerſi per que' numeri irrazionali, o ſordi, che moſtrerebbero, come eſſe ſi commiſuraſſero alla unità. Così benchè prendendo per unità il lato d'un quadrato, la diagonale di eſſo, che come ſi è detto (articolo 129), è incommenſurabile al lato, non poſſa eſprimerſi per alcun numero razionale, nulladimeno, perchè ſi dimoſtra da' Geometri, che ſe poteſſe aſſegnarſi un numero, che moltiplicato in ſe ſteſſo produceſſe preciſamente 2, queſto numero moſtrerebbe, come la diagonale ſi commiſuri col lato ſuddetto; perciò quel numero irrazionale, o ſordo, che moltiplicato per ſe ſteſſo produce 2 eſprimerà la diagonale del quadrato preſo il lato di eſſo per unità.

134 Nel che è da ſapere, che quando un numero razionale, o irrazionale moltiplicato in ſe ſteſſo ne produce un altro, chiamaſi *radice quadrata*, o ſemplicemente *radice* di quel prodotto, e ciò ſuole denotarſi con queſto carattere $\sqrt{\ }$, che ſignifica radice, aggiungendovi appreſſo il numero, di cui egli è radice. Così il numero, che moltiplicato in ſe ſteſſo produrrebbe 2, ſi ſcrive $\sqrt{2}$, che vuol dire radice di due. Il numero poi, che naſce dalla moltiplicazione d'un altro in ſe ſteſſo, chiamaſi *quadrato* di quello, ſe da due moltiplicazioni *cubo*, e così ſe da 3, 4, 5. &c. moltiplicazioni diceſi quarta, quinta poteſtà &c.

E parimente quando un numero moltiplicato in ſe ſteſſo ne produce un altro, il quale di nuovo moltiplicato per lo primo faccia un prodotto, chiamaſi *radice cubica* di queſto prodotto; che ſi ſcrive così $\sqrt[3]{\ }$, con aggiungervi appreſſo il numero del prodotto ſuddetto. Così $\sqrt[3]{24}$ vuol dire quel numero, che moltiplicato due volte in ſe ſteſſo produca 24. E lo ſteſſo diſcorſo ſi applica alle radici del 4°, 5°, ed altri gradi ulteriori.

Da che ſi vede, che molte quantità incommenſurabili riſpetto a quella, che ſi è preſa per unità, ſi potranno eſprimere

con radici irrazionali, o ſorde. Così a cagion d'eſempio preſo per unità il lato d'un quadrato, la diagonale di eſſo ſi eſprimerà (articolo 133) per queſta radice irrazionale $\sqrt{2}$, e così d'altre molte.

Delle proporzioni.

135 Ogni quantità paragonata con un'altra del medeſimo genere ha verſo di eſſa un particolar rapporto in quel genere di quantità, per cui chiamaſi o uguale, o in un certo modo maggiore, o minore di quella. Queſto rapporto diceſi *ragione*, o *proporzione*; onde in ogni proporzione ſono ſempre due quantità, che diconſi i *termini* di eſſa, cioè quella quantità, che ſi riferiſce ad un'altra, chiamaſi *antecedente*, e quella, a cui ſi riferiſce, diceſi *conſeguente* della proporzione.

136 Quando l'antecedente d'una proporzione è uguale al conſeguente, la ragione diceſi d'*egualità*.

Quando l'antecedente è maggiore del conſeguente, di *maggiore inegualità*, quando minore, di *minore inegualità*.

137 Se i due termini della proporzione ſono commenſurabili fra loro la proporzione diceſi *razionale*, ſe incommenſurabili *irrazionale*.

138 Fra le proporzioni razionali ſe l'antecedente ſarà *moltiplice* del conſeguente, la ragione ſi dice *moltiplice*, ſe ſarà *ſummultiplice* del conſeguente la ragione diceſi *ſummultiplice*. Le altre ragioni razionali hanno anch'eſſe de i particolari nomi, ma che non ſono molto uſuali, nè neceſſarj a ſaperſi.

139 Quando ſi abbiano due, o più proporzioni, quei termini, che in eſſe preſtano il medeſimo ufficio in ordine alla proporzione ſi dicono *omologhi* fra loro; cioè a dire gli antecedenti ſi dicono termini omologhi agli altri antecedenti, e i conſeguenti chiamanſi termini omologhi agli altri conſeguenti.

Delle proporzionalità.

140 L'Antecedente d'una proporzione diraſſi avere una *ſimile*, o *eguale*, o *medeſima ragione* al ſuo conſeguente, che un altro antecedente al ſuo, quando eſpreſſi amendue gli ante-

antecedenti per l' unità, verranno i due conseguenti ad essere espressi per un medesimo numero razionale, o irrazionale. O pure quando espressi per l' unità i conseguenti, verranno gli antecedenti ad essere espressi per un medesimo numero razionale, o irrazionale.

Per maggior chiarezza sieno due proporzioni, nella prima delle quali sia l' antecedente (*Fig.* 102) A, conseguente B; nella seconda antecedente C, conseguente D; le quali quantità se bene per facilità maggiore si mettono sotto gli occhi, come linee rette, possono tuttavia essere quantità di qualsivoglia genere, come tempi, pesi, forze &c.; anzi possono essere di due diversi generi; purchè però ciascuno antecedente sia del medesimo genere col suo conseguente, altrimenti non sarebbe tra essi proporzione (articolo 137). Si eleggano due de' termini omologhi, verbigrazia, gli antecedenti; e preso il primo antecedente A per l' unità, sia un qualsivoglia numero razionale, o irrazionale quello, che esprime il suo conseguente B, come 3. Se ora prendendo nella seconda proporzione per unità l' antecedente C, si troverà il medesimo numero 3 esser quello, che esprima il conseguente D, si dirà la ragione di A a B esser simile, o eguale, o pur la medesima colla ragione di C a D. Così se a cagion d' esempio A fosse una linea di 7 piedi, e B di 21, e C fosse un peso di 15 libbre, e D di 45, si diranno simili le ragioni della retta A alla B, e del peso C al D. Imperocchè presa la retta A, che è di 7 parti per l' unità, cioè considerata questa retta, come 1, la retta B, che è di 21 di quelle prime parti sarà precisamente tre di queste misure delle quali A è 1, e parimente presa la quantità C, che è libbre 15 per 1, la quantità D, che è libbre 45, sarà anch' essa precisamente 3 di queste misure, delle quali C è una. Dunque i due conseguenti B, D saranno espressi dal medesimo numero 3, quando gli antecedenti vengono amendue espressi per 1; e perciò le ragioni saranno simili, o eguali, o piuttosto una medesima ragione. Il medesimo s' intende in tutte le altre proposizioni razionali, o irrazionali.

141 La similitudine, o egualità, o indentità delle ragioni dicesi *proporzionalità*, o *analogia*, e i termini di due ragioni simili diconsi fra loro *proporzionali*, e così dicesi *essere*, o *stare*

l'antecedente d'una delle date ragioni al ſuo conſeguente, come l'antecedente dell'altra al ſuo. Sogliono i Geometri per eſprimere in compendio, che quattro quantità ſono proporzionali, cioè l'antecedente A al conſeguente B, come l'altro antecedente C al conſeguente D, ſcrivere, ed appuntare i termini delle proporzioni nella ſeguente maniera, che ſervirà d'eſempio in tutt' i caſi ſimili, A : B : : C : D.

142 Quando due quantità preſe egual numero di volte, ne miſurano due altre, queſte due diconſi *egualmente moltiplici* di quelle. Ed è manifeſto, che di due quantità, che ſieno egualmente moltiplici di due altre; così ſarà la prima a quella, di cui è moltiplice, come la ſeconda a quella, di cui è ugualmente moltiplice, e al contrario. Come, ſe *b* (*Fig.* 103) ſarà miſurata ſei volte da *a*, e *d* ſei volte da *c*, è manifeſto, che preſe verbigrazia le due *a*, *c* per antecedenti, e ciaſcuna di eſſe per l'unità, le due altre *b*, *d*, che ſi conſiderano, come conſeguenti, ſaranno eſpreſſe per lo medeſimo numero 6 (articolo 130), e l'iſteſſo vale ſe *b*, *d* ſi prendano per antecedenti, e per l'unità, e perciò ſaranno *a* : *b* : : *c* : *d* (articolo 140), oppure *b* : *a* : : *d* : *c*.

143 Se due quantità avranno la medeſima ragione, a due altre, i due termini omologhi minori, ſi diranno *parti ſimili* de' maggiori, qualunque ſia la detta ragione. Da che ſi raccoglie, che due quantità, delle quali due altre ſieno egualmente moltiplici, ſono parti ſimili di queſte (articolo 142).

144 Oltre la proporzionalità propriamente detta, che è quella, che abbiamo finora ſpiegata, e diceſi anco *proporzionalità geometrica*, ſi conſidera ancora da' Geometri un' altra ſpecie di proporzionalità, benchè impropria, che chiamaſi *aritmetica*. Diconſi dunque proporzionali aritmeticamente quattro quantità, quando la prima eccede, o manca dalla ſeconda altrettanto, quanto la 3 dalla quarta. Come ſe *f* (*Fig.* 104) foſſe d'una miſura, *g* di due, *h* di 4, *i* di 5, delle medeſime miſure, queſte quattro quantità ſarebbero in proporzionalità aritmetica; mentre il difetto della prima dalla ſeconda, cioè di 1 da 2, che è di una miſura, ſarebbe eguale al difetto della terza dalla quarta, cioè di 4 da 5, che è parimente di una miſura. Laddove a volere, che la proporzionalità foſſe geome-

trica,

trica, cioè vera proporzionalità, posto *f* 1, *g* 2, *h* 4, facilmente si vede, che *i* dovrebbe essere 8, e non 5.

145 Si considera ancora talvolta da' Geometri un' altra impropria specie di proporzionalità, che dicesi *armonica*; ed è in un certo modo mista della geometrica, e dell' aritmetica, cioè quando sono tre quantità tali, e talmente ordinate, che la prima di esse ha la medesima proporzione geometrica alla terza, che ha la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza. Come se saranno (*Fig.* 105) tre linee di queste misure 3, 4, 6, (presa per tutte e tre una comune misura) saranno in proporzione armonica; attesochè la prima 3 alla terza 6 ha la medesima proporzione geometrica, che ha la differenza 1 fra la prima, e la seconda, alla differenza 2 fra la seconda, e la terza; essendo in fatti tanto 3 suddupla di 6 quanto 1 di 2, e perciò geometricamente proporzionali (articolo 142).

146 Tornando alla proporzionalità propria, e geometrica, se il conseguente della prima proporzione sarà egli medesimo, che farà anche ufficio di antecedente nella seconda, la proporzionalità dirassi continua. Come se l' antecedente *a* (*Fig.*106) fosse al conseguente *b* nella medesima ragione, che il medesimo *b*, preso ora per antecedente, ad un altro conseguente *c*. E ciò, com' è manifesto, non può accadere, se non quando tutte e tre le quantità sieno d' un medesimo genere. Ma ove l' antecedente della seconda proporzione sia quantità diversa dal conseguente della prima, la proporzione dirassi *discreta*, e questa può aver luogo anche fra quantità di diversi generi, come si è detto all' articolo 140. Un esempio della continua sarebbe fra le quantità espresse per questi numeri 2. 4. 8. presa per tutti e tre una comune misura; e della discreta in questi 2, 4, 9, 18 presa una comune misura per le due prime, e l' istessa, o pure un' altra misura per le due ultime.

147 E' manifesto, che la proporzionalità continua equivale ad una discreta, nella quale il secondo antecedente sia eguale al primo conseguente. Onde tutto quello, che si mostrerà nelle proporzioni discrete, cioè in quattro diversi termini proporzionali, si potrà applicare anco alle proporzioni continue.

Assiomi, e teoremi fondamentali della dottrina delle proporzioni.

148 SE una quantità sarà doppia d' un' altra, si esprimerà per un numero doppio, se tripla per un numero triplo &c. prendendo sempre per unità una medesima grandezza. E se una quantità sarà espressa con numero doppio d' un' altra sarà doppia di questa, se con triplo, tripla &c., purchè l' unità sia sempre la medesima. Il che è evidente per se stesso.

149 Ogni quantità, che sia espressa per qualsivoglia numero razionale, o irrazionale, prendendo per unità una tal grandezza; se si prenderà poscia per unità un' altra grandezza moltiplice della prima, verrà espressa per un altro numero summultiplice del primo, secondo la stessa moltiplicazione; e se si prenderà per unità una summultiplice della prima, verrà espressa per un numero multiplice del primo, secondo, l' istessa moltiplicazione.

Come se essendo l' unità *a* (*Fig.* 107), la linea *c* venisse espressa per un tal numero, che mostrerebbe, come ella si comnisurasse coll' unità *a* (qualunque si fosse questo numero anche irrazionale), se poscia si prendesse per unità un' altra quantita *b* verbigrazia doppia della prima, e con questa nuova unità dovesse *c* esprimersi per un numero, cioè trovar quel numero, che mostrerebbe, come ella si commisurasse colla nuova unità *b*, è manifesto, che questo numero sarebbe la metà del primo numero, con cui *c* era espressa per rapporto alla prima unità *a*. Perocchè se *c* si esprimerà verbigrazia col numero *6*, cioè conterrà *6* volte *a*, non potrà contenere, che 3 volte *b*, che è del doppio maggiore di *a*; onde si esprimerà per 3, che è sudduplo di *6*; e se *c* si esprimerà col numero $2\frac{4}{5}$, cioè conterrà due volte *a*, e di più quattro di quelle parti delle quali *a* era 5, non potrà contenere *b*, che una volta, e di più due di quelle parti delle quali *b* sia 5, per essere tanto *b* doppio di *a*, quanto la quinta parte di *b* doppia della quinta parte di *a*, e perciò esprimerassi per $1\frac{2}{5}$, che è numero sudduplo del primo numero $2\frac{4}{5}$, e il medesimo vale di ogni altro numero anco inassignabile, come pare per se evidente senza alcuna altra prova.

150

150 Nelle quantità proporzionali se due termini omologhi si esprimeranno per un medesimo numero razionale, o irrazionale, anche gli altri due termini omologhi saranno espressi da un medesimo numero razionale, o irrazionale; e se saranno quattro quantità, delle quali esprimendone due per un medesimo numero razionale, come sopra, o irrazionale, anco le altre due vengono ad esprimersi per un medesimo numero, come sopra, le quantità saranno proporzionali, e omologhi quei termini, che restano espressi per lo medesimo numero.

Per metter in chiaro questa verità, sieno due quantità (*Fig.* 108) a, b, e due altre proporzionali ad esse, cioè c, d per modo, che si abbia $a : b :: c : d$. E' manifesto, che esprimendo due termini omologhi, verbigrazia gli antecedenti a, c per l' unità, cioè considerandoli ciascuno per una misura, anche gli altri due omologhi, cioè i conseguenti b, d, verranno ad esprimersi per un medesimo numero, ciascuno per rapporto a quella misura, mentre in ciò appunto consiste la proporzionalità (articolo 140). Poniamo ora, che il termine a, il quale si è una volta considerato, come unità, si esprima con qualche altro numero; cioè a dire, che in vece di prender per unità la quantità a, se ne prenda un' altra del medesimo genere, che sia f, e in ordine a questa unità si esprima a, con quel numero, che le conviene, cioè con quello, che mostra, come a si commisuri coll' unità f. Poniamo inoltre, che la quantità c si esprima col medesimo numero di a, cioè, che prendendo in vece dell' unità c un' altra quantità del medesimo genere, che sia g, la quantità c venga espressa col medesimo numero con cui è espressa a prendendo l' unità f. Dico, che se ora la quantità b si esprimerà con un numero per rapporto all' unità f, e parimente d, si esprimerà con un numero per rapporto all' unità g, i numeri, che esprimeranno b, d non saranno diversi, ma uno stesso numero. Questa proposizione, come pure la conversa di essa, ben' intesa che sia, è per se stessa evidente senza altra prova non meno, che le altre due antecedenti.

151 Ciò posto dico, che se saranno due quantità del medesimo genere, e due altre egualmente moltiplici di quelle, come la prima alla seconda, così sarà il moltiplice della prima all' egualmente moltiplice della seconda. Sie-

Sieno *a*, *b* [*Fig.* 109] del medesimo genere, e sia *c* egualmente moltiplice di *a*, che *d* di *b*, dico che *a* : *b* : : *c* : *d*. Imperocchè sia prima *c* doppia di *a*, e perciò anche *d* doppia di *b*. Prendasi per unità qualsivoglia quantità *f* del medesimo genere, e per rapporto a questa si esprimono *a*, *b*, co' loro numeri razionali, o irrazionali. Parimente per rapporto alla medesima unità *f* si esprimano *c*, *d* co' loro numeri. E' manifesto, che il numero di *c* sarà doppio del numero di *a*, e il numero di *d* doppio di quello di *b* (articolo 148). Prendasi ora un' altra unità *g* doppia della prima *f*, e per rapporto ad essa esprimansi le due sole quantità *c*, *d*. Poichè dunque l'unità *g* è doppia dell' unità *f*, il numero, che esprime *c*, per rapporto all' unità *g* sarà sudduplo del numero, che esprimerà la medesima *c* per rapporto all' unità *f* (articolo 149), e perciò sarà eguale al numero, che esprima *a* per rapporto all'unità *f*. Per la medesima ragione si troverà, che il numero, che esprime *d* per rapporto all' unità *g*, sarà eguale a quello, che esprime *b* per rapporto all' unità *f*. Abbiamo dunque quattro quantità, cioè *a* antecedente, *b* conseguente; e di nuovo *c* antecedente, *d* conseguente, e si è mostrato, che espressi i due antecedenti con un medesimo numero i conseguenti vengono anch' essi espressi con un medesimo numero, ciascuno per rapporto all' unità del suo antecedente. Dunque le quantità suddette sono proporzionali (articolo 150) cioè *a* : *b* : : *c* : *d*. Il che era da mostrare. Nel medesimo modo si argomenterebbe se le quantità *c*, *d* fossero non doppie ma triple di *a*, *b*, prendendo allora l' unità *g* tripla di *f*, e così in ogni altra moltiplicazione. Dunque &c.

152 Da ciò si inferisce, che se saranno due quantità *h*, *i* (*Fig.* 110), e di più sarà un qualunque numero di quantità eguali ad *h*, come a cagion d' esempio le tre *k*, *l*, *m*, ed altrettante eguali ad *i*, come le tre *n*, *o*, *p*; così sarà *h* ad *i*, come tutte insieme *h*, *k*, *l*, *m*, a tutte insieme *i*, *n*, *o*, *p*. Imperocchè l' aggregato di tutte *h*, *k*, *l*, *m*, non è che un moltiplice di *h*, e l' aggregato di altrettante *i*, *n*, *o*, *p*, non è, che un ugualmente moltiplice di *i*; Dunque (articolo 151) avremo, come *h* ad *i*, così l' aggregato di *h*, *k*, *l*, *m*, all' aggregato di *i*, *n*, *o*, *p*.

De'

De' modi di argomentare praticati da' Geometri nelle quantità proporzionali.

153 SOgliono i Geometri, proposte, che siano quattro quantità proporzionali prese con un tal ordine, come queste $a:b::c:d$, inferire, che sono eziandio proporzionali prese, che sieno in alcune altre maniere, e con altro ordine; e queste maniere diverse, noi prendiamo ora a spiegare, e insieme a dimostrare per legittime.

154 Il primo modo dicesi argomentare *invertendo*, che altri dicono *convertendo*, e consiste nel prendere i due conseguenti, come antecedenti, e riferire ciascuno al suo antecedente, come a conseguente; così perchè $a:b::c:d$; dunque $b:a::d:c$. Che questa illazione sia legittima, e per se stessa evidente, mentre, o si prendano per antecedenti a, c, e per conseguenti b, d, o per antecedenti questi due ultimi, e per conseguenti i due primi, sempre si verifica, che espressi due de' termini omologhi per l' unità, gli altri due sono espressi per uno stesso numero, e tanto basta per essere le quantità proporzionali (articolo 140).

155 Il secondo modo dicesi *alternando*, ovvero *permutando*, ed è quando il primo antecedente si riferisce al secondo, come a conseguente, e il primo conseguente, preso anch' esso, come antecedente, si riferisce al secondo conseguente. Così, perchè $a:b::c:d$; dunque $a:c::b:d$. Il qual modo però non può aver luogo se non quando tutti e quattro i termini sieno quantità d' un medesimo genere, come è evidente. Che questo modo sia conchiudente, e legittimo si dimostra. Imperocchè se si tratta di proporzione moltiplice, già si è mostrato [all' articolo 151], che gli egualmente moltiplici hanno fra loro la medesima ragione, che le quantità delle quali sono moltiplici. Dunque $a:c::b:d$. Se poi non si tratta di proporzione moltiplice, ma di qualunque altra razionale, o irrazionale, intendasi una comune misura di a, e di b, che sia f (*Fig*. 111), la quale sarà assegnabile, se la proporzione è razionale, e inassegnabile se irrazionale, e il numero, per cui f misura a, come pure quello, per cui misura b, sarà finito nel primo caso, e in infinito nel secondo. Intendasi ora c divisa in altrettante

parti, quanto è il numero finito, o infinito, che f misura a, e sia una di queste parti g; onde le due a, c, saranno egualmente moltiplici delle due f, g, e per conseguenza avremo (articolo 151) $a:c::f:g$. Ora poichè $a:b::c:d$, e il numero, che esprime a coll' unità f, è il medesimo, che esprime c coll' unità g, è forza, che anche il numero finito, o infinito, che esprimerà b coll' unità f, sia il medesimo, che esprimerà d coll' unità g (articolo 150), e perciò le due b, d saranno egualmente moltiplici delle due unità f, g. Dunque $b:d::f:g$. Ma poc' anzi si è mostrato, che $a:c::f:g$; dunque $a:c::b:d$; il che era da dimostrare.

156 Il terzo modo è *argomentare componendo*, che è il prender la somma dell' antecedente col conseguente per una quantità sola, ordinando la proporzione in una delle due seguenti maniere, cioè: posto che sia $a : b :: c : d$
sarà anco $a+b:b::c+d:d$
o pure $a+b:a::c+d:c$
dove il segno $+$ significa *più*, ovvero *con*, per modo, che $a+b$ vuol dire *a con b*, o sia *a con di più b*, cioè la quantità sola composta delle due a, b, o diciamo la somma di a, e di b. Questa maniera di argomentare è legittima; imperocchè essendo $a:b::c:d$, espressi i due antecedenti a, c con un medesimo numero, anco i conseguenti b, d, si esprimeranno con un medesimo numero (articolo 150). Essendo dunque il numero di a eguale al numero di c, se a questi due numeri eguali aggiungeremo i due numeri eguali di b, e di d, le somme saranno eguali; cioè il numero di $a+b$ eguale al numero di $c+d$. Noi abbiamo dunque quattro quantità, cioè $a+b$ antecedente, b conseguente, $c+d$ antecedente, d conseguente, e si è mostrato, che i termini omologhi sono espressi co' medesimi numeri. Dunque (articolo 150) le quantità prese con quest' ordine sono proporzionali, cioè $a+b:b::c+d:d$, e poco diverso sarà il raziocinio per mostrare l' altra parte, cioè $a+b:a::c+d:c$.

157 Il quarto modo è argomentare *dividendo*, che consiste nel prender la differenza tra l' antecedente, e il conseguente (cioè quello, che resta sottraendo il minore di essi dal maggiore) per una quantità, e ordinar poscia la proporzione in una

una delle due seguenti maniere: Perchè $a : b :: c : d$

posto l'antecedente maggiore del consegu.	sarà ancora	$a - b : b :: c - d : d$
	o pure	$a - b : a :: c - d : c$
posto l'antecedente minore del conseguente		$b - a : b :: d - c : d$
		$b - a : a :: d - c : c$

dove il segno — significa *meno*, o pure *senza* per modo, che $a - b$ vuol dire *a meno b*, o pure *a senza b*, cioè quella quantità, che resta sottraendo b da a, che dee intendersi per una sola quantità, benchè espressa per due lettere, ed è insomma l'eccesso di a sopra b, o sia il difetto di a da b, o in una parola la differenza tra b, ed a. Che dunque un tal modo d'argomentare sia legittimo si mostrerà, come nell'articolo 156, se non che ivi si fece la somma, e quì dee farsi la sottrazione de' numeri eguali, e procedere nel rimanente, come prima.

158 Il quinto modo dicesi per *conversion di ragione*, e consiste nel prendere o la somma, o la differenza dell'antecedente, e del conseguente con ordinare le proposizioni in una delle seguenti maniere: Perchè $a : b :: c : d$

prendendo la somma	sara ancora,	$a : a + b :: c : c + d$
	o pure,	$b : a + b :: d : c + d$
prendendo la differenza	posto l'antecedente maggiore del conseguente	$a : a - b :: c : c - d$
		$b : a - b :: d : c - d$
	posto l'antecedente minore del conseguente	$a : b - a :: c : d - c$
		$b : b - a :: d : d - c$

e la dimostrazione non è punto diversa da quelle de' due articoli precedenti.

159 Il sesto modo è *per egualità ordinata*, e si pratica nella seguente maniera. Sia la ragione di a a b la medesima, che di o ad q, e inoltre sia b ad un' altra quantità c, come q ad un' altra r; e parimente sia c ad una quarta d, come r ad una quarta t, e così proseguisca la proporzionalità in tanti termini, quanti si vorrà; da che poi si inferisce, che come il primo antecedente a del primo ordine all' ultimo conseguente d del medesimo ordine, così sta il primo antecedente o del secondo ordine all' ultimo conseguente t del medesimo ordine.

a, b, c, d
o, q, r, t

 Che

Che tal modo d'argomentare sia concludente si dimostra. Imperocchè espresse *a*, *b* per due numeri, si potranno i loro omologhi *o*, *q* esprimere co' medesimi numeri [articolo 150], sieno questi razionali, o irrazionali. Se dunque ritenute le medesime unità, si esprimerà anche *c* per quel numero razionale, o irrazionale, che gli conviene, è forza, che parimente *r* venga espresso col medesimo numero di *c*; giacchè si suppone $b:c::q:r$. E perciò saranno $a:c::o:r$. E procedendo col medesimo discorso, finchè vi sono termini nelle proporzioni, si mostrerà, che gli ultimi due *d*, *t* si esprimeranno col medesimo numero, posto sempre, che i due primi *a*, *o* sieno espressi con un medesimo. Dunque saranno $a:d::o:t$; il che era da dimostrare.

160 Il settimo, ed ultimo modo dicesi *per egualità perturbata*. Sieno dunque due ordini di quantità, nel primo de' quali sia la prima *a* alla seconda *b*, come nel secondo la prima, *o* alla seconda *q*, e come

a, b, c

r, o, q, f

nel primo la seconda *b* ad una terza *c*, così nel secondo una terza *r* alla prima *o*. Dico, che come nel primo ordine la prima *a* alla terza *c*, così nel secondo la terza *r* alla seconda *q*; e in questo consiste l'egualità perturbata. Imperocchè intendasi un'altra quantità *f*, alla quale stia la quantità *q*, come sta la *b* alla *c*. Dunque le tre quantità *a*, *b*, *c*, e le tre altre *o*, *q*, *f*, sono disposte, come nell'egualità ordinata, e sono proporzionali con quell'ordine, che in essa si richiede, e perciò avremo $a:c::o:f$ (articolo 159) ciò premesso, come

si suppone	$q:f::b:c$
e parimente, come si suppone	$b:c::r:o$
sarà necessariamente ancora	$q:f::r:o$
e alternando questa proporzione [articolo 155], sarà	$q:r::f:o$
e invertendo quest' ultima (articolo 154), sarà	$o:f::r:q$
ma poc' anzi si è mostrato essere	$o:f::a:c$
dunque sarà finalmente	$r:q::a:c$

il che era da dimostrare. La medesima dimostrazione verrebbe, se il numero de' termini fosse maggiore di tre, e fossero disposti nel modo, che in tre termini si è mostrato.

Delle

Delle ragioni composte.

161 PRoposte due quantità del medesimo genere una per antecedente, e un' altra per conseguente, la ragione dell' antecedente al conseguente, qualunque ella si sia, dicesi *composta* di quella di esso antecedente a qualsivoglia terza quantità dello stesso genere, e di quella di questa terza quantità al conseguente. Come se saranno due linee *a*, *b* (*Fig.* 112), la ragione dell' antecedente *a* al conseguente *b* si dirà composta della ragione di esso antecedente *a* ad una terza linea, qualunque siasi verbi grazia *c*, e della ragione di questa stessa linea *c* al conseguente *b*.

Parimente la ragione dell' antecedente al conseguente dicesi composta della ragione di esso antecedente a qualsivoglia terza quantità, della ragione di questa terza ad una quarta, e della ragione di questa quarta al conseguente. Così la ragione dell' antecedente *a* al conseguente *b* si dirà eziandio composta dalle ragioni dell' antecedente *a* alla *c*, della *c* alla *d* (che è un' altra linea di qualsivoglia grandezza), e di questa *d* al conseguente *b*. E il medesimo s' intende qualunque sia il numero delle ragioni intermedie, che si prendono. Onde generalmente qualunque ragione si può intendere composta di qualsivoglia numero di ragioni, qualunque esse sieno, purchè l' antecedente della composta sia il primo antecedente delle componenti, e ciascun conseguente di queste sia antecedente di quella, che segue; E per fine l' ultimo conseguente delle componenti sia lo stesso, che il conseguente della composta.

Benchè non sia necessario addurre alcuna cagione, per cui i Geometri chiamano composte le ragioni nella maniera, che si è spiegata, non essendo questa, che una maniera di parlare, che è stata in loro arbitrio d' introdurre anche senza cagione alcuna; nulladimeno è bene osservare, che quel numero, che esprime la ragione di un antecedente ad un conseguente, viene appunto ad essere composto dalla moltiplicazione di due numeri, uno de' quali esprima la ragione del detto antecedente a qualsisia terza quantità dello stesso genere, e l' altro esprima la ragione di questa terza quantità al conseguente. Così

posto,

posto, che *a* sia verbigrazia di due parti, e *b* di quattro, e così *a* sia la metà di *b*; questo numero rotto $\frac{1}{2}$ esprimerà la ragione di *a* verso *b*, cioè mostrerà, che *a* è appunto metà di *b*. Poniamo ora, che *c* sia otto di quelle medesime parti, e che perciò *a*, che è di due, venga ad esser un quarto di *c*, onde il numero $\frac{1}{4}$ esprima la ragione di *a* verso *c*. Essendo ora *c* otto, *b* quattro delle dette parti, sarà *c* doppia di *b*, e questo numero 2 esprimerà la ragione di *c* verso *b*. Moltiplichiamo $\frac{1}{4}$, che esprime la ragione di *a* verso *c* per 2, che esprime la ragione di *c* verso *b*; ecco, che verrà a comporsi appunto il numero $\frac{2}{4}$, o sia $\frac{1}{2}$, che è quello, che esprime la ragione dell' antecedente *a* al conseguente *b*. Bene sta dunque, che i Geometri abbiano chiamata la ragione di *a* verso *b* composta di quella di *a* verso *c*, e di quella di *c* verso *b*. Il medesimo si troverà in tutti gli altri casi, qualunque sia il numero delle ragioni componenti, ancor che queste fossero irrazionali, cioè espresse con numeri sordi, e potrebbe anco addursene una dimostrazione, come alcuni hanno fatto, ma si tralascia, perchè questa ne condurrebbe troppo in lungo, e per altro non si stima necessaria, non avendo i Geometri debito di render conto delle cagioni, che hanno avuto d' imporre più uno, che un altro vocabolo alle cose, che hanno difinite.

162 Quando le ragioni delle quali una ragione s' intende esser composta sono tutte eguali fra loro, la composta si dirà *duplicata*, *triplicata* &c. d' una di quelle ragioni secondo il numero di esse ragioni. Sia dunque la ragione di *a* verso *b* (*Fig.* 113) qualunque si voglia, e sia un' altra quantità *c* tale, che $a:c::c:b$; in tal caso la ragione di *a* verso *b*, che è composta (articolo 161) della ragione di *a* verso *c*, e di quella di *c* verso *b*, si dirà duplicata di ciascuna di queste due ragioni, che sono amendue eguali, o piuttosto la medesima. Parimente se sarà $a:d::d:e$, e di nuovo $d:e::e:b$, la ragione di *a* verso *b* si dirà triplicata di ciascuna di queste tre ragioni, e così in tutti gli altri casi, qualunque sia il numero delle ragioni. Ove è da avvertire, che i Geometri per esprimere brievemente una ragione duplicata, triplicata, o in altro modo moltiplice di un' altra, tralasciano di ripetere il voca-

vocabolo ragione, e solamente esprimano i termini di essa. Così per esprimere, che la ragione di *a* verso *b* è duplicata di quella di *a* verso *c*, non diranno *la ragione di a* a *b esser duplicata della ragione di a* a *c*, ma diranno *la ragione a* a *b esser duplica di a* a *c*, e così in ogni altro caso.

163 Quando, come la prima alla seconda, così la seconda è alla terza, la seconda si dirà *media proporzionale* fra la prima, e la terza, o semplicemente *media*, o pur *media geometrica*.

164 Quando una proporzione Geometrica continua oltrepassa i tre termini, l'aggregato di questi presi per ordine dicesi una *progressione*, o *serie geometrica*. Come se *a* (*Fig.* 114) fosse due terzi di *b*, *b* due terzi di *c*, *c* due terzi di *d* &c. l'aggregato de' termini *a*, *b*, *c*, *d* presi con quest'ordine dirassi una progressione geometrica. Se i termini non saranno, che quattro, il secondo, e il terzo si diranno i due medj proporzionali, e il primo, e il quarto i due estremi. Se cinque il secondo, terzo, e quarto saranno tre medj proporzionali, e il primo, e il quinto i due estremi, e così in ogni altro caso.

165 Si considerano ancora da' Geometri talvolta le *progressioni*, o *serie aritmetiche*, che sono aggregati di più termini, ciascuno de' quali eccede, o manca dal suo antecedente d'una differenza sempre eguale. Come in queste quantità espresse per li numeri 3, 5, 7, 9, &c. presa sempre per unità una misura costante.

Molti teoremi potrebbero quì aggiungersi in materia delle proporzioni, ma si tralasciano, come quelli, che o non sono punto necessarj, o con facilità si intendono, intese, che sieno le cose finora dette.

LIBRO VII.

Delle proporzioni, e della misura delle figure piane rettilinee, della proporzione de' triangoli, e de' parallelogrammi di eguale altezza.

166 SIeno due triangoli (*Fig.* 115) ABE, CFD, che abbiano eguale, o comune altezza, e le loro basi sieno EB, FD. Dico che il triangolo ABE sta al triangolo CFD, come la base EB alla base FD. Imperocchè se le due basi saranno commensurabili, presa una comune misura di amendue, e divisa l'una, e l'altra base in parti di tal misura, è manifesto, che tirando da ciascuna divisione al vertice A, o rispettivamente C, delle rette linee, ciascuno de' due triangoli AEB, CFD resterà da queste diviso in altri triangoli; e che non solo tutt'i triangoli di AEB saranno eguali tra loro, come pure quelli di CFD tra loro, ma eziandio ciascuno di quelli di AEB sarà eguale a ciascuno di quelli di CFD, a cagione delle altezze de' vertici A, C sopra le basi EB, FD le quali altezze si suppongono eguali (articolo 66). E' anche manifesto, che il numero de' triangoli in AEB sarà eguale al numero delle divisioni di EB, e quello de' triangoli in CFD eguale al numero delle divisioni di FD. Poichè dunque abbiamo quattro quantità, cioè EB antecedente, FD conseguente; e di nuovo AEB antecedente, CFD conseguente, e i due antecedenti EB, ed AEB essendo espressi con un medesimo numero (cioè con quello della divisione di EB) anco i due conseguenti FD, e CFD sono espressi con un altro medesimo numero di misure eguali alle prime (cioè con quello delle divisioni di FD), ne segue (articolo 150), che come la base EB alla base FD, così stia il triangolo AEB al triangolo CFD, Se poi le basi fossero incommensurabili la dimostrazione sarà la medesima, se non che i numeri delle divisioni di EB, FD dovranno intendersi infiniti, come quelle, che non avranno misura comune se non infinitamente piccola, il

Fig. 103.

6 6 1 1 a b c d

21

102.

45

Fig. 105.

Fig. 107.

Fig. 106.

a b c 2 4 8 2 4 9 18

Fig. 109.

6 c 3 b 4 8 d 4 g

Fig. 110.

h k l m i n o p

a f b c g d

Fig. 111.

a b c d

Fig. 114.



il che non ostante i numeri de' triangoli di AEB, CFD saranno sempre i medesimi con quelli delle loro basi.

167 E' evidente, che questa medesima dimostrazione si può anche applicare a' due parallelogrammi (*Fig.* 116) AB, CD della medesima, o di eguale altezza (articolo 65), e che perciò anche questi avranno tra loro la medesima ragione, che hanno le loro basi.

Della misura delle figure rettilinee, e del modo di esprimerla per numeri.

168 SIccome le linee si misurano per linee, così i piani si misurano per piani; e siccome il numero, che mostra quante volte replicata una linea ne misuri un' altra, dicesi esprimere questa linea, così quel numero, che mostra quante volte replicato un piano ne misuri un altro, dirassi esprimere questo piano, di qualunque figura sia tanto il piano, che si misura, quanto l' altro, che prendesi per misura di questo, potendo qualsivoglia specie di figura piana intendersi misurata per qualsivoglia specie di figura piana. E quando qualsivoglia figura piana si prenda per unità, tutte le altre commensurabili, o incommensurabili ad essa si esprimeranno per quel numero razionale, o sordo, che mostrerà, come esse si commisurano coll' unità, che si sarà presa, come si fa delle linee, e d' ogni altra quantità (articolo 130).

169 Sogliono nulladimeno i Geometri per maggiore facilità esprimere la misura delle figure piane, per quadrati piuttosto, che per altra figura piana. Sia dunque da misurare, e da esprimer per numeri un rettangolo (*Fig.* 117) AC. Stabiliscasi per misura, o sia per unità una linea, il cui quadrato prendasi parimente per unità, come il quadrato d' un' oncia, d' un piede, d' una pertica &c., che dicesi anco oncia quadrata, piede quadrato, pertica quadrata &c. Poniamo, che la linea presa per unità misuri tanto il lato AB, quanto il BC del rettangolo AC, come AB sette volte, e BC tre volte. E' manifesto, che tirando per tutte le divisioni di AB, che nasceranno dall' applicarci attualmente la detta misura, delle rette linee parallele al lato BC, e all' incontro per tutte le

 di-

divisioni, che similmente risulteranno di BC, altre linee parallele ad AB, tutto il rettangolo AC rimarrà risoluto in quadrati di quella misura, che si è presa per unità, e che il numero di tutti questi quadrati sarà necessariamente quello, che nascerà dalla moltiplicazione del numero, che esprime la misura di un lato AB, per lo numero, che esprime la misura dell' altro lato BC, cioè nel nostro caso di 7 per 3. Il numero dunque, che risulta dalla moltiplicazione de' numeri de' due lati (che nel nostro caso è 21) esprimerà la grandezza del rettangolo AC in misure quadrate della grandezza, che si sarà stabilita per unità, o misura.

Poniamo in secondo luogo, che l' unità, che si è presa, misuri il lato (*Fig.* 118) AB, verbi grazia sette volte, come prima, ma non il BC, in cui capisca verbi grazia tre volte coll' avanzo DC, minore dell' unità suddetta, il quale perciò si potrà esprimere per un numero rotto, o almeno per un irrazionale, o sordo. Tirate come sopra le parallele per tutte le divisioni di AB, e di BC, è manifesto, che per esprimere il rettangolo AC, al numero, che esprime il rettangolo AD (cioè al prodotto di AB in BD), converrà aggiungere quello, che esprimerà il rettangolo DF fatto coll' altezza AB, o sia CF sopra l' avanzo DC, come base, cioè la somma di tutti i rettangoli eguali a CK, che hanno per altezza l' unità DK, e per base DC. Ora il rettangolo CK, prendendo per unità uno de' quadrati DL, si esprime col medesimo numero, con cui si esprime il lato DC prendendo per unità una delle linee GD, attesochè (per l' articolo *166*) GD : DC : : DL : CK. Dunque tutt' i rettangoli eguali a CK, che costituiscono DF, si esprimeranno in misura dell' unità quadrata DL, per lo numero DC (qualunque egli sia, anche irrazionale) moltiplicato nel numero di FC, cioè di AB; e questo prodotto aggiunto al numero di AD esprimerà il rettangolo AC. Ma il prendere il prodotto del numero AB nel numero BD, e l'aggiungervi il prodotto del numero AB nel numero DC, non è altro, che il fare il prodotto del numero AB in tutto il numero BC; dunque anco in questo caso il prodotto, che risulta dalla moltiplicazione de' numeri de' due lati, esprimerà il rettangolo fatto da' medesimi.

Fi-

Finalmente se l' unità non misurasse ne l' uno, ne l' altro de' lati AB, BC, come nella [*Figura* 119], non sarà tuttavia difficile applicare anco a questo caso la medesima dimostrazione. Onde in universale conchiuderemo, che la misura d' ogni rettangolo si esprime col numero, che risulta dalla moltiplicazione de' due numeri esprimenti i lati di esso.

170 Dalchè si raccoglie, che ogni quadrato si esprimerà per la moltiplicazione in se stesso di quel numero, che esprime uno de' suoi lati. E questa è la cagione, per cui dagli aritmetici il prodotto dalla moltiplicazione d' un numero per se medesimo chiamasi il quadrato di questo numero, e all' incontro radice quadrata d' un numero dicesi quello, che moltiplicato in se medesimo lo produce; e finalmente numeri quadrati si denominano tutti quelli, che nascono dalla moltiplicazione d' un numero razionale per se stesso, come 1, 4, 9, 16, &c. a distinzione degli altri 2, 3, 5, 7, 8, che non vengono detti quadrati.

171 E perchè ogni parallelogrammo, come (*Fig.* 120) AB, è sempre eguale a un rettangolo CF fatto su la medesima base AC, e che abbia la medesima altezza AF [articolo 65]; perciò la espressione di qualsivoglia parallelogrammo in numeri si avrà moltiplicando il numero, che ne esprime l' altezza per quel numero, che ne esprime la base, giacchè questa appunto (articolo 169) sarà l' espressione del rettangolo, che ad esso è eguale.

172 Parimente, perchè ogni triangolo, come (*Fig.* 121), ABC è la metà d' un rettangolo CD fatto sopra la medesima base BC nell' istessa altezza DB [articolo 66]; perciò la metà del numero, che esprime un rettangolo, cioè [articolo 169] la metà del prodotto del numero dell' altezza nel numero della base esprimerà il triangolo. Può dunque aversi l' espressione d' ogni triangolo in tre modi; o col prendere la metà dell' altezza DB, cioè GB, e moltiplicarla per tutta la base BC; o col prendere la metà della base BC, cioè BH, e moltiplicarla per tutta l' altezza BD; o col moltiplicare tutta l' altezza BD per tutta la base BC, e prender poscia la metà del prodotto; giacchè in tutti e tre questi modi risulta il medesimo numero, cioè GC, ovvero DH, che sempre sarà la metà del rettangolo DC.

173 E finalmente, perchè ogni figura rettilinea ABCDE

[*Fig.* 122] ſempre ſi può riſolvere in triangoli, trovata che ſia in numeri l' eſpreſſione di queſti (prendendo però per ciaſcuno di eſſi ſempre la medeſima unità), la ſomma di tutt' i numeri, che eſprimono i detti triangoli eſprimerà la figura ſuddetta, qualunque ſia il numero de' lati di eſſa. A ciò fare il modo più ſpedito è di tirare da un angolo della figura, come B delle rette a tutti gli altri non adiacenti D, E delle quali rette una, o più d' una divenendo ſempre lato comune di due triangoli; può prenderſi per baſe comune d' ambedue, e per altezza la perpendicolare, che dagli angoli oppoſti a queſto lato cade ſulla medeſima comune baſe, che con ciò ſi riſparmierà il numero delle calcolazioni, che ſi richiederebbero, riſolvendo la figura in triangoli in altra maniera.

De' parallelogrammi equiangoli, ed eguali fra loro, e delle figure reciproche.

174 Sieno quattro linee proporzionali fra loro (*Fig.* 123) GF : IL :: LM : GN, e dalle due eſtreme GF, GN, ſia contenuto il rettangolo GH, come pure delle due intermedie IL, LM il rettangolo LK. Dico che queſti rettangoli ſono eguali fra loro. Intendaſi una comune miſura delle due GF, IL, o finita, o infinitamente piccola, caſo che foſſero incommenſurabili, e diviſa l' una, e l' altra linea in tali miſure, per tutte le diviſioni ſi tirino delle parallele a' lati GN, LM. E' certo che ſe ora ſi dividerà LM nel medeſimo numero di parti eguali, in cui è diviſa GF (le quali però ſaranno di lunghezza maggiore, o minore di quelle di GF), il numero di queſte parti, che miſurerà GN ſarà il medeſimo, che quello delle parti di LI; mentre eſſendo gli antecedenti GF, LM, eſpreſſi con un medeſimo numero, anco i conſeguenti IL, GN debbono eſſer eſpreſſi con un medeſimo numero (articolo 150); diviſa dunque la retta, GN colla miſura delle parti di LM, e tirate per le diviſioni dell' una, e dell' altra le rette parallele a' lati GF, LI, ſaranno i due rettangoli GH, LK diviſi in rettangoli tutti fra loro eguali, mentre ciaſcuno di eſſi ha per un lato una delle diviſioni delle due prime GF, IL, e per un altro lato una delle diviſioni

ni

ni delle due ultime LM, GN. Ed è anco manifesto, che il numero di questi rettangoli, che costituisce GH, è eguale al numero de' medesimi, che costituisce LK; mentre l'uno, e l'altro nasce dalla moltiplicazione de' numeri eguali di GF, LM, per li numeri eguali di GN, LI. Dunque i rettangoli GH, LK sono fra loro eguali.

175 Nell'istessa maniera si mostrerà, che se tre linee saranno proporzionali, come (*Fig.* 124) AB : CD :: CD : BE, il quadrato fatto dalla media CD sarà eguale al rettangolo fatto dalle estreme AB, BE. Imperocchè facendo, ora CD uficio di due termini della proporzione, questo caso viene ad essere il medesimo, che quello dell'articolo antecedente.

176 All'incontro se due rettangoli FG, HI (*Fig.* 125) saranno eguali: come un lato del primo FK a un lato del secondo HL, così sarà l'altro lato di questo HN all'altro lato del primo FM. Imperocchè se così non fosse, accresciuto, o sminuito uno de' lati suddetti, verbi grazia FM, fino in P permodo, che fosse FK : HL :: HN : FP, e compito il rettangolo PK, sarebbe questo eguale al rettangolo HI, a cui già si suppone eguale il rettangolo FG; onde la parte FG sarebbe eguale al tutto PK, il che è impossibile. E nel medesimo modo si mostrerà, che se un quadrato sarà eguale ad un rettangolo, il lato del quadrato sarà media proporzionale fra i due lati del rettangolo.

177 Tutto ciò, che si è detto negli articoli 174, 175, e 176 intorno a i rettangoli, e a i quadrati si può applicare nella stessa maniera, e colle medesime dimostrazioni alle romboidi, e a' rombi, cioè a tutti gli altri parallelogrammi non rettangoli, purchè però i due parallelogrammi de' quali si tratta sieno fra loro equiangoli, cioè abbiano un angolo eguale, che tanto basta per dover avere necessariamente eguali anco gli altri angoli.

178 Anzi perchè ogni triangolo è metà d'un parallelogrammo, che abbia per lati due de' lati del triangolo, e l'angolo, compreso da questi, comune con esso (articolo 58), si applicheranno i suddetti teoremi eziandio a' triangoli, purchè i lati, de' quali si tratta, comprendano in amendue un angolo eguale, o pure angoli, de' quali l'uno sia supplemento dell'

altro;

altro, giacchè compiendo i parallelogrammi, sarebbero questi equiangoli, e sarebbero i triangoli le loro metà.

179 Quando due triangoli, o due parallelogrammi hanno i lati proporzionali con quell'ordine, che si è finora detto, cioè, come un lato della prima figura ad uno della seconda, così l'altro lato della seconda all'altro della prima, diconsi avere i lati *reciprocamente proporzionali*, ed esse figure si chiamano *reciproche*. Onde per le cose dette è evidente, che le figure reciproche sempre sono eguali fra loro; purchè amendue sieno parallelogrammi, o amendue triangoli, e purchè gli angoli compresi da' lati reciprocamente proporzionali, sieno eguali, o pure l'angolo d'una delle due figure sia il supplemento dell'altro a' due retti.

Della similitudine de' triangoli, e delle altre figure rettilinee.

180 Sieno due triangoli ABC, DCE (*Fig.* 126) fra loro equiangoli, cioè l'angolo A sia eguale al D, il B al DCE, e il BCA al CED. Si prolunghi uno de' lati del primo triangolo, come BC, e sopra di esso, così prolungato, si stenda il lato CE, che nell'altro triangolo gli corrisponde per l'opposizione dell'angolo eguale; talchè i due angoli ACB, DCE si tocchino nel punto C, come la figura mostra. E' manifesto, che essendo eguali gli angoli BCA, CED, la linea DE verrà a giacere in sito parallelo alla CA, e per una simil ragione la DC sarà parallela alla BA (articolo 28). Si prolunghino ora ED, BA, finchè s'incontrino in F. Per B si tiri BH parallela ad AC, e per E si tiri EH parallela ad AB, e prolungate le due DC, AC incontrino BH in G, ed EH in I. Sarà dunque BE un parallelogrammo, e la retta BE diagonale di esso, e perciò i complementi CF, CH eguali fra loro [articolo 62], i quali essendo inoltre equiangoli, a cagione degli angoli, che hanno in C, opposti per vertice, avranno i lati reciprocamente presi proporzionali fra loro, cioè, come DC a CI, così CG a CA, [articolo 177].

Ma

Ma CI è eguale a DE, e CG eguale ad AB [articolo 58]. Dunque, come DC a DE, così AB ad AC. Nell' istessa maniera, prolungato qualsivoglia altro lato del primo triangolo, si mostrerà, che gli altri due sono proporzionali a' lati corrispondenti del secondo triangolo. Dunque generalmente ne' triangoli equiangoli i lati, che comprendono angoli eguali, sono proporzionali fra loro, e omologhi nella proporzione sono que' lati, che sono opposti ad angoli eguali.

181 Poichè dunque in qualsivoglia triangolo MNO [*Fig.* 127] tirando una retta PR parallela ad uno de' lati NO, il triangolo MPR, che ne risulta, è equiangolo al triangolo MNO (articolo 41), i lati de' triangoli MPR, MNO saranno proporzionali prendendoli col dovuto ordine, a cagion d' esempio

ON : NM : : RP : PM.
ON : OM : : RP : RM.
NM : OM : : PM : RM.

E così in tutte le altre maniere nelle quali possono combinarsi prendendo sempre per termini della proporzione que' lati, che contengono angoli eguali, e per omologhi quelli, che sono opposti ad angoli eguali.

182 Da ciò si inferisce, che in ogni triangolo MNO tirata una retta RP parallela ad un lato ON gli altri due lati MN, MO, restano proporzionalmente divisi da essa ne' punti P, R, cioè a dire, che MP : PN : : MR : RO. Imperocchè essendo per l' articolo antecedente MP : MR : : MN : MO
sarà alternando [articolo 155] MP : MN : : MR : MO
dunque per conversione di ragione
(articolo 158) MP : PN : : MR : RO
e con poco diversa maniera si proverebbe, che anco le parti NP, OR saranno proporzionali a tutti NM, OM, aplicando debitamente i diversi modi di argomentare spiegati nel libro antecedente, il che per brevità si tralascia.

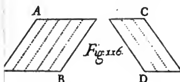
183 E all' incontro se in un triangolo ABC (*Fig.* 128) una retta DE, dividerà proporzionalmente i lati AB, AC in D, ed E, essa sarà parallela alla base BC. Imperocchè se tale non fosse, potrebbe per lo punto E tirarsi un' altra retta EF parallela ad essa BC, il che fatto sarebbero i lati AB, AC proporzionalmente divisi in E, F (articolo 182); il che è impossibile

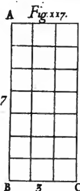
fibile; mentre essendo per lo supposto AE:EC::AD:DB
se fosse ancora AE:EC::AF:FB
converrebbe che fosse AD:DB::AF:FB
e componendo (articolo 156) sarebbe AB:DB::AB:FB
dunque DB, FB sarebbero eguali, e pure si sono poste disuguali.

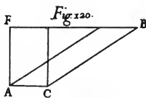
184 Quindi è, che due triangoli ABC, DEF [*Fig.* 129], che abbiano i lati CA, CB, proporzionali a' lati FD, FE cogli angoli compresi da essi C, ed F fra loro eguali, saranno necessariamente equiangoli. Poichè presa sopra uno de' detti lati del primo triangolo, come sopra BC la retta CK eguale al lato omologo EF, e sopra l'altro lato CA del primo la retta CG, eguale all'altro lato omologo FD, sarà CG a CK, come CA a CB, e dividendo, ed alternando saranno CG: GA::CKKB; e perciò (articolo 183) GK, AB sono parallele, e perciò gli angoli G, A, e gli angoli K, B eguali (articolo 25). Ma gli angoli G, K sono eguali a' due D, E [articolo 49]; dunque i triangoli DEF, ABC sono equiangoli.

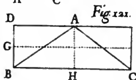
185 E parimente due triangoli ABC, DEF (*Fig.* 130), che abbiano i tre lati proporzionali a' tre lati, saranno equiangoli. Perocchè posto, che i due lati, BC, EF sieno omologhi, fatto sopra EF nel punto E l'angolo KEF eguale all'angolo B, e l'angolo KFE, eguale all'angolo C, il triangolo EKF sarà equiangolo ad ABC. Dunque (articolo 180) saranno
AB:BC::KE:EF
ma già si suppongono AB:BC::DE:EF
dunque saranno KE:EF::DE:EF
e perciò KE sarà eguale a DE. Nell'istessa maniera si proverà KF eguale a DF, e già il lato EF è comune a' due triangoli EDF, KEF. Dunque (articolo 51) i due triangoli DEF, KEF sono eguali, ed hanno gli angoli eguali, che si oppongono a' lati eguali, cioè l'angolo D eguale al K, il DEF eguale al KEF, ed il DFE eguale al KFE; ma i tre angoli del triangolo KEF sono per la construzione eguali a quelli del triangolo ABC; dunque anche quelli del triangolo DEF sono eguali a' medesimi, e perciò i triangoli sono equiangoli.

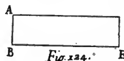
186 Due figure, che abbiano gli angoli eguali, e i lati, che

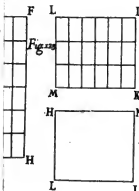

A
B
C
D
Fig. 116.


A
Fig. 117.
7
B
3
C


Fig. 120.
F
B
A
C


Fig. 121.
D
A
G
B
H
C


A
B
E
Fig. 124.


F
L
I
M
K
H
N
H
L
I

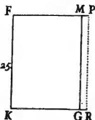
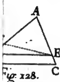
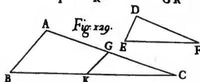

C
D

Fig. 125.


A
E
C
Fig. 128.


F
M P
K
G R
A
Fig. 129.
G
B
K
C


D
E
F

che li comprendono, proporzionali, si chiamano *figure simili*, qualunque sia il numero de' loro lati. E perciò due quadrati sono sempre figure simili. E perchè ne' triangoli si è dimostrato (agli articoli 180, 185), che quando abbiano una di queste due condizioni, avranno necessariamente anco l'altra; perciò una di esse basterà per conchiudere, che due triangoli sieno simili.

187 E' anche manifesto, che due parallelogrammi AB, BC (*Fig.* 131) i quali sieno intorno al diametro d'un altro parallelogrammo AC, saranno simili e fra di loro, e col tutto AC; imperocchè facilmente si vede, che sono equiangoli, e dalle cose dette all'articolo 180 risulta, che hanno proporzionali que' lati, che contengono gli angoli eguali; onde quando il parallelogrammo AC fosse un quadrato, gli altri due AB, BC sarebbero anch'essi quadrati, e all'incontro essendo uno di essi un quadrato, anche il residuo, ed il tutto lo sarebbero.

Della proporzione, che hanno fra loro le figure simili.

188 SE saranno tre linee BK, DG, ed F (*Fig.* 132) proporzionali, il quadrato AK della prima, starà al quadrato DE della seconda, come la prima BK alla terza F. Perocchè prolungando un lato del primo AB in BC, talchè BC sia eguale ad F, e compiendo il rettangolo CK, sarà questo eguale al quadrato DE (articolo 175); ora il quadrato AK sta al rettangolo CK, come AB, a BC (articolo 167), cioè come BK ad F; dunque il quadrato AK sta anche al quadrato DE, come BK ad F: il che era da dimostrare.

189 E perchè la ragione di BK ad F dicesi duplicata di quella BK a DG (articolo 162); perciò due quadrati, come AK, DE staranno sempre fra loro in ragione duplicata de' loro lati.

190 Se di nuovo saranno tre linee proporzionali, un triangolo qualunque AFB (*Fig.* 133) fatto sopra la prima AB, starà al triangolo simile CGD fatto sopra la seconda CD, ed in cui questa sia lato omologo ad AB, come la prima AB

alla terza E. Imperocchè presa sopra la retta BA la retta BH eguale ad E, e congiunta HF, essendo che si suppongono simili i triangoli AFB, CGD, avranno proporzionali i lati, che sono intorno agli angoli eguali D, B, e perciò avremo AB : BF : : CD : DG
dunque alternando (articolo 149) AB : CD : : BF : DG
ma per la costruzione abbiamo AB : CD : : CD : BH
dunque saranno BF : DG : : CD : BH
e perciò i due triangoli FBH, CDG hanno i lati reciprocamente presi proporzionali fra loro; onde sono necessariamente eguali (articolo 178); giacchè gli angoli B, D compresi da questi lati si suppongono per altro eguali. Posto ciò essendo certo, che il triangolo FBA sta al triangolo FBH, come la base BA alla base BH (articolo 166), converrà dire, che lo stesso triangolo FBA stia anco al triangolo CDG, come BA a BH, cioè come BA ad E; il che era da dimostrare.

191 Da ciò nasce, che due triangoli simili stanno fra loro nella medesima ragione, in cui stanno due quadrati fatti sopra due lati omologhi (articolo 188), che è il medesimo, che dire stanno in duplicata ragione de' loro lati omologhi (articolo 189).

192 Quando si abbiano due figure simili (*Fig.* 134) ABCDE, FGHIK, i lati omologhi delle quali sieno AB, ed FG; BC, e GH; CD, ed HI; DE, ed IK; EA, ed FK; e gli angoli eguali sieno quelli, che vengono compresi da' detti lati omologhi, è manifesto, che in quanti triangoli si risolverà una delle dette figure, in altre tanti potrà risolversi l'altra. Sieno dunque amendue risolute, verbi grazia in tre triangoli per mezzo di rette linee tirate dagli angoli eguali A, F a tutti gli altri, come la figura dimostra. E' manifesto, che i due triangoli ABC, FGH, che hanno i lati proporzionali intorno agli angoli eguali B, G saranno simili (articolo 188), e l'angolo BCA sarà eguale al GHF; i quali angoli tolti dagli eguali BCD, GHI, lasciano eguali gli angoli ACD, FHI; e perchè CA starà a CB, come HF ad HG, e già CB si suppone stare a CD, come HG ad HI, starà anche per l'egualità ordinata (articolo 159) CA a CD, come HF ad HI. Dunque anco i triangoli ACD, HFI hanno i lati loro pro-

por-

porzionali intorno ad angoli eguali, e perciò sono simili fra loro; onde facendo passaggio da questi agli altri ADE, FIK, si mostrerà medesimamente, che questi due sono fra loro simili, e così di tutti gli altri, se più ve ne fossero; dacchè è manifesto, che due figure rettilinee simili si possono sempre risolvere in triangoli non solo pari di numero, ma eziandio simili fra di loro, paragonando quelli, che sono sopra i lati omologhi.

193 Ora ciò posto è da considerare, che come sta il triangolo ABC al triangolo FGH, così il triangolo ADC al triangolo FIH; poichè essendo tanto i due primi, quanto i due ultimi simili fra loro (articolo 192), staranno così questi, come quelli nella ragione de' quadrati fatti su i lati comuni CA, HF, che sono lati omologhi [articolo 191]. Parimente i due triangoli CAD, HFI, staranno fra loro, come i due AED, FKI, dovendo stare tanto gli uni quanto gli altri, come i quadrati di AD, FI, e così degli altri triangoli, se maggior numero ve ne fosse; onde tutt' i triangoli d'un poligono hanno una medesima ragione a tutt' i triangoli, che corrispondono a ciascun d'essi nell'altro poligono; e perciò tutto il poligono ABCDE sta a tutto il poligono FGHIK, come uno di essi triangoli ABC al suo corrispondente FGH. Ma il triangolo ABC sta al triangolo FGH in ragione duplicata de' lati omologhi, verbi grazia di AB ad FG (articolo 190), o sia nella ragione de' quadrati di AB, FG (articolo 191); dunque anche tutto il poligono sta a tutto il poligono in ragione duplicata di quella di AB, FG, o sia in ragione de' quadrati di AB, FG, i quali sono lati omologhi d'essi poligoni.

194 Combinando per tanto le cose dette agli articoli [189, 191, 193], si raccoglie generalmente, che tutti le figure simili stanno fra loro nella proporzione duplicata de' loro lati omologhi.

195 Si raccoglie ancora, che se quattro linee (*Fig.* 135) A, B, C, D saranno proporzionali, le figure rettilinee descritte sopra di esse, che sieno simili fra loro a due a due, ed abbiano per lati omologhi quelle linee, che sono proporzionali, saranno anch'esse proporzionali; cioè a dire, se come A a B, così sarà C a D, e le due figure sopra A, B saranno simili fra

loro, come pure le due ſopra C, D ſimili fra loro per modo, che i lati omologhi delle figure A, B ſieno A, B, e gli omologhi delle figure C, D ſieno C, D; ſtarà la figura A alla B, come la C alla D. Imperocchè la ragione della figura A alla figura B ſarà duplicata di quella del lato A al lato B [articolo 194], cioè di quella della retta C alla retta D. Ma anche la ragione della figura C alla figura D è la ragione duplicata della retta A alla retta B (articolo 194); dunque è manifeſto, che le figure ſono proporzionali. E al contrario facilmente ſi moſtrerà, che ſe quattro figure ſaranno proporzionali, e ſimili fra loro a due a due, i loro lati omologhi ſaranno proporzionali.

196 Poichè per le coſe dette all' articolo 194 tutte le figure ſimili hanno fra loro la ragione duplicata de' loro lati omologhi, ne ſegue, che due parallelogrammi ſimili abbiano anch' eſſi una tal ragione. Se poi non ſaranno ſimili, ma che tuttavia ſiano equiangoli, dico che avranno fra loro la ragione compoſta di quelle de' loro lati prendendo gli antecedenti delle ragioni in uno de' parallelogrammi, e i conſeguenti nell' altro. Sieno dunque due parallelogrammi equiangoli [*Fig.* 136] AC, CF. Dico che la ragione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF è compoſta della ragione d' uno de' lati del primo, qualunque egli ſia, verbi grazia BC, ad uno de' lati del ſecondo verbi grazia CG, e della ragione dell' altro lato del primo CD all' altro lato del ſecondo CE. Intendanſi i due lati BC, CG poſti in diritto uno dell' altro nel punto C per modo, che BCG ſia una ſola retta linea; il che fatto è facile il vedere (per l' articolo 18), che eziandio gli altri due lati DC, CE non coſtituiranno, che una ſola retta DCE. Si prolunghino i lati AD, FG, finchè s' incontrino nel punto H. Quindi come il lato BC al lato CG così intendaſi, che ſtia una retta di qualſiſia lunghezza I ad un' altra K; e come il lato DC al CE, così queſta retta K ad una terza L. Poichè dunque la ragione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CH è quella di BC a CG [articolo 166], cioè di I a K, e quella del parallelogrammo CH al parallelogrammo CF è quella di CD a CE, cioè quella di K ad L, ſarà anche per egualità ordinata [articolo 159] la ragione del parallelogrammo AC

al

al parallelogrammo CF quella di I ad L. Ma la ragione di I ad L è composta delle ragioni di I a K, e di K ad L [articolo 161], cioè delle ragioni di BC a CG, e di DC a CE. Dunque la ragione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF è composta delle ragioni del lato BC al CG, e del lato DC al CE: il che era da dimostrare.

197 E perchè due rettangoli sono parallelogrammi equiangoli, avranno sempre fra loro la ragione composta di quelle de' loro lati; cioè il primo di essi starà al secondo in ragion composta dell'altezza del primo all'altezza del secondo, e della base del primo alla base del secondo.

198 E finalmente, perchè due triangoli sono sempre la metà di due rettangoli, che hanno per base un lato del triangolo, e per altezza la perpendicolare tirata a questo lato dall' angolo opposto, ne segue, che due triangoli ancorchè non avessero alcun angolo eguale saranno sempre in ragion composta delle loro basi, e delle loro altezze, prendendo in ciascuno di essi per base quel lato, che si vorrà, e per altezza la perpendicolare, che cade dall'angolo opposto sopra il detto lato.



LIBRO VIII.

Problemi, che dipendono dalla dottrina delle proporzioni.

NEl presente libro, benchè non siamo per esporre, che problemi geometrici fondati su la dottrina delle proporzioni, sarà tuttavia facile il dedurre da questi molti utilissimi, ed importantissimi teoremi, che a bella posta abbiamo tralasciati finora, e particolarmente nel libro settimo, come quelli, la dimostrazione de' quali più facilmente si sarebbe compresa deducendoli a guisa di corolarj da' problemi di questo ottavo libro. Imperocchè la soluzione di ciascun problema, se ben si considera, sempre fornisce un teorema, siccome all' incontro ciascun teorema somministra il fondamento, e l' artificio per sciogliere, uno, o più problemi; onde per lo più la medesima dottrina con poca mutazione, o per modo di teorema, o di problema si può proporre. Così, a cagion d' esempio, si è da noi dimostrato all' articolo 69 per modo di teorema, che ne' triangoli rettangoli il quadrato dell' ippotenusa è eguale alla somma de' quadrati de' perpendicoli, dal che è stato facile lo sciorre il problema dell' articolo 117, cioè dati due quadrati farne un altro eguale alla somma di amendue; mentre a ciò fare altro non ha bisognato, che disporre i lati de' due quadrati dati per modo, che facessero angolo retto, e compito poscia il triangolo fare un quadrato sopra l' ippotenusa di questo. Che se da principio avessimo preso a sciorre questo medesimo problema, la costruzione, e la dimostrazione di esso ci avrebbe palesata la medesima proprietà de' triangoli rettangoli, che per modo di teorema si era premessa, cioè la egualità de' quadrati de' perpendicoli al quadrato dell' ippotenusa. Per simil modo adunque non sarà difficile il raccorre da' molti de' problemi, che ora sciorremo, diverse proprietà de' circoli, e delle figure rettilinee, delle quali per lo studio della brevità, e della facilità non si era finora data notizia; e a tal fine si darà talvolta da noi più d' un metodo per sciorre uno istesso problema.

Pro-

Problemi, che riguardono le terze, le quarte, e le medie proporzionali in linee.

199 Date due rette linee trovare ad esse la terza proporzionale. Si stendano le due rette date una sopra l'altra incominciando dal medesimo punto A (*Fig.* 137), come AB, AD, e fatto in A qualsivoglia angolo rettilineo DAE, per l'altro estremo D di quella linea, che dee essere la seconda nella proporzione, si descriva un arco di circolo, che abbia per centro il punto A, e che tagli AE in C, quindi congiunto BC, si tiri per D la retta DE parallela a BC, la quale tagli AE in E. Dico, che AE è la terza proporzionale cercata. Imperocchè essendo i triangoli BAC, DAE equiangoli (articolo 41) avranno i lati intorno all'angolo comune A proporzionali (articolo 180), cioè come AB ad AC, così AD ad AE. Ma AC per la costruzione è eguale ad AD; Dunque come AB ad AD, così AD ad AE. Il che era da fare.

Lo stesso problema si potrà eziandio sciorre nella seguente maniera. Sia la prima delle due date AB (*Fig.* 138), a cui nell'estremo B si drizzi a perpendicolo la seconda BC, e congiunta AC, si tiri a questa per C la perpendicolare CD, che incontri la AB prolungata nel punto D. Dico, che DB è la terza proporzionale cercata. Imperocchè essendo l'angolo ACD retto, e da esso cadendo sull'ippotenusa AD la perpendicolare CB, saranno i triangoli ABC, BCD equiangoli [articolo 42], e perciò avranno i lati proporzionali prendendo per omologhi quelli, che sono opposti ad angoli eguali (articolo 180), cioè a dire, come AB a BC, così BC a BD; Il che era da fare.

200 Quando delle linee date la seconda sia minore della prima, si sciorrà ancora il problema nel seguente modo. Sia la prima FG (*Fig.* 139), e sopra di essa descrivasi il semicircolo FHG, e dall'uno de' due estremi F si applichi nel semicircolo FH eguale alla seconda delle date. Poscia dal punto H tirisi la HK perpendicolare ad FG, che la incontri in K. Dico, che FK è la terza proporzionale, che si cerca. Imperocchè congiunta HG, l'angolo FHG sarà retto [arti-

colo

colo 92); onde il triangolo FHK sarà equiangolo al tutto FHG, e perciò, come nel precedente articolo, ordinando debitamente i termini della proporzione, si avrà FG : FH : : FH : FK. Il che &c.

201 Finalmente potrà trovarsi la terza proporzionale a due date in quest' altra maniera. Sia AB (*Fig.* 140) la prima, AC la seconda, che si dispongano in A a qualsivoglia angolo. Si congiunga BC, e poscia all' angolo B facciasi eguale l' angolo ACD, e la retta CD, che fa quest' angolo tagli AB (prolungata ove facesse uopo) nel punto D. Dico, che AD è la terza cercata. Perocchè i due triangoli ACB, ACD, avendo comune l' angolo A, ed eguali per la costruzione i due ABC, ACD, saranno equiangoli, e perciò si conchiuderà, come sopra AB : AC : : AC : AD. Il che era &c.

202 Date due rette trovare fra esse la media proporzionale. Primo modo. Sulla maggiore delle due date AB (*Fig.* 141) si descriva il semicircolo ACB, e da uno degli estremi A prendasi sopra AB la retta AD eguale all' altra delle date. Quindi alzando la perpendicolare DC, che incontri il semicircolo in C, e congiungendo AC, è evidente per le cose dette all' articolo 200, che sarà AB ad AC, come AC ad AD, e perciò AC sarà la media cercata.

Secondo modo. Si costituiscono le due date EF, FG (*Fig.* 142) in diritto nel punto F per modo, che GFE sia una sola retta, sopra la quale facciasi il semicircolo GHE, e si alzi la perpendicolare HF fino al semicircolo in H. E' manifesto perciò, che si disse all' articolo 199, che FE starà ad FH, come FH ad FG; e perciò HF è la media, che si cerca.

Terzo modo. Sieno le linee date AF, AH, [*Fig.* 143] amendue stese sulla retta AH, e incominciant dal punto A. Si descriva un circolo, che passi per li due punti H, F (il che si fa agevolmente, o col prender per diametro del circolo la retta HF, o col tirare sopra di essa una perpendicolare, che la divida a mezzo, e poscia far centro del circolo in un punto, qual siasi, di questa perpendicolare coll' intervallo della distanza di questo punto dal punto H, ovvero F), e a questo circolo si tiri dal punto A la tangente AE (articolo 123). Dico, che questa è la media, che si cerca. Imperocchè

chè congiungendo dal punto del contatto E le rette EH, EF, l'angolo AEF sarà eguale all'angolo H, che è nell'alterno segmento (articolo 49). Dunque i triangoli EAH, EAF (come si è mostrato all'articolo 201) si mostreranno equiangoli, e i loro lati proporzionali, cioè AF:AE::AE:AH. Il che era da &c.

203 Date tre rette linee ritrovare la quarta proporzionale. Primo modo. Si congiungano le due prime BA, BC (*Fig.* 144) a qualunque angolo in B, e sulla prima, che sia BA, si prenda (prolungandola ove faccia bisogno) la retta BD eguale alla terza delle date. Quindi congiungendo AC, si tiri ad essa la parallela DE, che incontri BE (prolungata quanto occorra) in E. Dico, che BE è la quarta cercata; il che è evidente; mentre a cagion delle parallele, i due triangoli ABC, DBE hanno i lati intorno all'angolo B proporzionali, cioè BA:BC::BD:BE [per l'articolo 180].

Secondo modo: nella medesima figura posta BA la prima delle date, ed AC la seconda, che faccia con essa qualunque angolo BAC, si congiunga BC, che prolungasi indefinitamente, e prendendo sopra BA la BD eguale alla terza data, si tiri DE parallela ad AC, che incontri BC in E. Dico, che DE sarà la quarta. O pure posta BA la prima, e in diritto di essa AD la seconda, e fatto qualsisia angolo DBE nel punto B, si prenda sopra BE la BC eguale alla terza, e congiunta AC, si faccia a questa parallela DE. Dico, che CE sarà la quarta. La dimostrazione dell'una, e dell'altra di queste due ultime costruzioni è evidente per le cose dette agli articoli (180, 181) per essere i triangoli ABC, DBE nell'uno, e nell'altro caso equiangoli a cagion delle parallele AC, DE.

Terzo modo. Si dispongono le tre linee date in maniera, che la seconda AD (*Fig.* 145), e la terza AC sieno sopra una medesima retta AD, incominciandi dal punto A, e la prima AB sopra un'altra retta AE, che cominci dal medesimo punto A, e faccia con essa qualunque angolo DAB. Per li tre punti D, C, B, si descriva un circolo (articolo 121), il quale tagli la retta AB, prolungata, se bisogna, nel punto E. Dico, che AE sarà la quarta proporzionale, che si

 cerca.

cerca. Imperocchè congiunte CB, DE, essendo CDBE un quadrilatero, i cui quattro angoli sono nella periferia d'un circolo, saranno i due angoli fra loro opposti DCB, DEB eguali a' due retti (articolo 93). Ma anche DCB, ACB sono eguali a' due retti (articolo 16). Dunque DEB, ACB sono eguali fra loro, e i triangoli ACB, AED equiangoli; onde (articolo 180) saranno AB:AC::AD:AE, o pure alternando AB:AD::AC:AE. Il che &c.

Quarto modo. Si costituiscano in diritto la seconda BE (*Fig.* 146), e la terza ED una da una parte, e l'altra dall'altra di un loro estremo comune E, e tirisi per E in qualunque angolo BEA, la AE eguale alla prima data. Per li tre punti A, B, D si descriva un circolo, che tagli AE prolungata dalla parte di E in C. Dico, che EC è la quarta proporzionale cercata. Perocchè congiungendo AB, DC, i due triangoli BEA, CED, che hanno gli angoli al vertice in E eguali, e di più gli angoli ABD, ACD, che insistono alla stessa periferia AD eguali (articolo 89), saranno equiangoli. Dunque (articolo 180) avranno i lati proporzionali, cioè AE:BE::ED:EC. Il che &c.

204 E' manifesto, che il problema dell'articolo 199, cioè date due rette trovar la terza proporzionale è il medesimo, che si proporrebbe in questi termini: Dato un quadrato, e una retta per lato d'un rettangolo, trovar l'altro lato di questo, talchè il rettangolo sia eguale al quadrato; imperocchè la seconda delle date può intendersi esser lato d'un quadrato, il quale dee esser eguale al rettangolo, che si comprenderebbe dalla prima, e dalla terza (articolo 175): Così pure, che il problema dell'articolo 202, cioè fra due rette trovar la media proporzionale, è lo stesso, che dato un rettangolo fare un quadrato eguale ad esso; giacchè le due date possono intendersi lati d'un rettangolo, a cui dee essere eguale il quadrato della media (articolo 175). E che finalmente il problema dell'articolo 203: date tre rette trovare la quarta proporzionale, è l'istesso, che dato un rettangolo farne un altro, che abbia un lato eguale a un dato; mentre la seconda, e la terza delle tre date possono intendersi contenere un rettangolo, a cui dee esser eguale quello, che si farebbe dalla

dalla prima data, e dalla quarta, che si cerca (articolo 174); onde dalle soluzioni date ne' suddetti articoli restano anche sciolti in più maniere i medesimi problemi, quando fossero proposti in questi altri termini, che ora si sono detti.

205 Data la retta terminata AB (*Fig.* 147) descrivere una linea curva, da ciascun punto della quale P tirando una perpendicolare PM sulla detta retta, essa PM sia media proporzionale fra le parti AM, BM della retta AB. Descrivasi sopra AB, come diametro il circolo APB, e sarà la curva cercata; imperocchè preso nell'uno, e nell'altro semicircolo qualunque punto P, la perpendicolare PM sarà media fra AM, BM, per le cose dette all'articolo 202 nella seconda soluzione del problema ivi proposto. La stessa soluzione servirebbe se il problema fosse espresso in questi termini: Data una retta terminata descrivere una curva, da ciascun punto della quale tirata una perpendicolare sopra la retta suddetta il quadrato della perpendicolare sia eguale al rettangolo compreso dalle parti della retta fatte dalla sezione di essa colla perpendicolare; come è evidente per l' articolo 175.

206 Dato un circolo, ABC (*Fig.* 148), trovare fuori di esso il punto D tale, che tirando da esso una retta DCB, la quale tagli il circolo in due punti C, B, e un' altra DA, che lo tocchi in A, il rettangolo fatto dalle rette BD, CD sia eguale al quadrato della tangente DB; o pure, che la tangente DA sia media proporzionale fra le rette BD, CD. Questo problema si scioglie prendendo qualsivoglia punto fuori del circolo, e tirando da esso qualsivoglia retta, che tagli il circolo in due punti, come si rende manifesto per le cose dette all' articolo 202 nella terza soluzione.

207 Dato un circolo GHI (*Fig.* 149), trovare dentro di esso il punto E, e tirare per questo punto due sottese GEF, HEI talmente, che il rettangolo fatto dalle parti dell' una GE, EF sia eguale al rettangolo delle parti dell' altra HE, EI; o pure GE ad EH stia come EI ad EF. Questo ancora si scioglie prendendo dentro al circolo qualsisia punto, e tirando per esso due sottese totalmente ad arbitrio, come risulta dalle cose dette all' articolo 203 alla soluzione quarta. I problemi di questa sorta, ne' quali ogni punto, che si prenda

 sopra

ſopra un dato piano, o in un dato ſpazio ſoddisfa alla queſtione, debbono riguardarſi piuttoſto, come teoremi; come nel caſo dell'articolo 206 ſi riduce il problema a queſto teorema: Se fuori del circolo ſi prenderà un punto, da cui ſi tiri una tangente al medeſimo, ed un'altra linea, che lo tagli in due punti, il quadrato della tangente ſarà eguale al rettangolo delle rette compreſe fra il punto preſo, e le ſezioni della ſecante col circolo; e nel caſo del preſente articolo 207, ſi ridurrà il problema in queſto teorema: Se dentro un circolo ſi prenderà un punto, per cui ſi tirino due ſotteſe, il rettangolo delle porzioni dell'una ſarà eguale al rettangolo di quelle dell'altra.

Problemi, che appartengono alla diviſione, delle linee in ragioni date.

208 Tagliar una retta linea in ragione di due linee date. Sia la retta AB (*Fig.* 150), che ſi debba tagliar in due parti, che abbiano fra loro la ragione delle linee *ag*, *gf*. E' manifeſto, che facendo in A un angolo BAF di qualſivoglia miſura, e prendendo ſopra AF le due AG, GF eguali alle due *ag*, *gf*, ſe ſi congiungerà FB, e ad eſſa ſi tirerà parallela GH, che tagli AB in H, reſtarà AB tagliata in H, come ſi deſidera (articolo 182). L'iſteſſo ſarebbe, ſe ſi proponeſſe, che tutta AB doveſſe ſtare ad AH, come AF ad AG, o ſe in altri ſimili modi ſi eſprimeſſe la proporzione, in cui doveſſe tagliarſi AB; come è manifeſto per la dottrina de' modi d'argomentare nelle proporzioni ſpiegate di ſopra.

209 L'iſteſſo ſi farebbe ſe occorreſſe tagliar la retta MN (*Fig.* 151) in tre, e più parti, che aveſſero una ragione data, cioè come MK, KV, VS. Poichè congiunta SN, e per li punti V, K tirate le rette VP, KR parallele ad SN, è manifeſto, che MR ſarebbe ad RP, come MK a KV, e (tirando RTO parallela ad MS) ſarebbe anche RP a PN, come RT, cioè KV, a TO, cioe ad VS, e perciò le tre parti MR, RP, PN avrebbero l' iſteſſa ragione colle tre MK, KV, VS.

210 Tagliar una retta in modo, che la ragione delle parti di

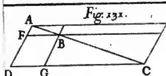


Fig. 131.

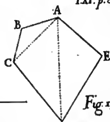


Fig. 134.

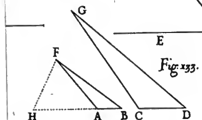
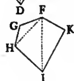


Fig. 133.



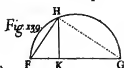


Fig. 139.

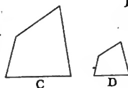


Fig. 135.

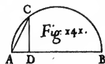


Fig. 141.

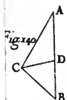


Fig. 140.

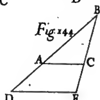


Fig. 144.

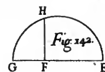


Fig. 142.



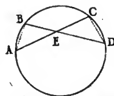


Fig. 146.

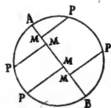


Fig. 147.



di essa sia quella, che si esprime con due, o più numeri dati. Sia (*Fig.* 152) AB da tagliar in tre parti, che abbiano fra loro quella ragione, che si esprime con questi tre numeri 2, 5, 3. Si faccia in A un angolo di qual si voglia misura FAB, e sopra FA prendasi AC d'una lunghezza arbitraria, la qual lunghezza si vada replicando in CD, DI &c. tante volte quanta è la somma de' numeri dati 2, 5, 3, che nel nostro caso è 10. Posto dunque, che AC presa 10 volte determini la lunghezza AF, si congiunga FB; indi, perchè il primo numero dato è 2 si prendano da A verso F due delle misure suddette, che siano AD, e per D si tiri DG parallela ad FB; e perchè il secondo numero è 5, si prendano da D verso F cinque altre misure, che sieno DE, e per E si tiri EH parallela ad FB, e così si proseguisca, finchè vi sono divisioni da farsi. E' manifesto, che le parti AG, GH, HB sono proporzionali alle parti AD, DE, EF (articolo 209), e perciò si esprimeranno le loro ragioni co' medesimi numeri di queste, cioè nel nostro caso co' numeri 2, 5, 3. Il che era da fare. L'istesso si farebbe, se si proponesse di tagliar una linea in modo, che la ragione della tutta alle sue parti si esprimesse con numeri dati, come nel nostro caso, se AB dovesse essere diviso in tre parti, talchè tutta AB fosse a ciascuna di esse, come dieci a due, cinque, e tre; che è come dire se si cercassero i due decimi, i cinque decimi, e i tre decimi della linea AB, e così in ogni altro numero possibile.

211 Da ciò è manifesto, che per tagliar una linea CD (*Fig.* 153), in tante parti eguali quanto si vuole, verbi grazia in sette, basta fare in uno de' due estremi C l'angolo DCE di qualunque grandezza, e quindi presa sulla linea indefinita CE una grandezza arbitraria CI, replicarla sette volte sopra di essa fino in E, e poscia congiunta ED, per ciascuna divisione di CE, come per I, tirare delle rette linee, come IF parallele a DE, le quali divideranno CD nella maniera, che si desidera.

212 Tagliare speditamente la base BC (*Fig.* 154) d'un dato triangolo BAC in due parti proporzionali a' lati adiacenti a ciascuna di esse parti. Dividete per mezzo l'angolo BAC opposto alla base BC, colla retta AD, la quale tagli essa base

se

se in D. Dico, che come BA ad AC così BD a DC. Imperocchè tirando CE parallela a DA, che incontri BA prolungata in E, l'angolo BAD sarà eguale all'interno, ed opposto AEC, e l'angolo DAC all'alterno ECA; ma BAD, DAC per la costruzione sono eguali; dunque anco AEC, ECA sono eguali, onde i lati AE, AC sono eguali. Ma a cagione delle parallele AD, CE, abbiamo BD:DC::BA:AE. (articolo 182). Dunque saranno ancora BD:DC::BA:AC; il che era da fare. Da ciò si raccoglie per teorema, che la retta, che divide a mezzo l'angolo d'un triangolo divide la base di esso in parti proporzionali a' lati, che comprendono il detto angolo.

213 Tagliar una linea data *nell' estrema*, e *media ragione*, cioè in modo, che come tutta la linea ad una delle sue parti da trovarsi, così stia questa all'altra parte. Sia la data retta AB (*Fig.* 155); sopra di essa descrivasi il quadrato AC, di cui un lato AD dividasi per mezzo in E, e tirata EB, dal centro E si descriva per B il circolo GBF, e prendasi AL eguale ad AF. Dico, che la retta AB, e tagliata in L, come si domanda, cioè, che tutta AB sta ad AL, come AL ad LB. Imperocchè tirata per L la retta KL parallela ad AF, e per F la FK parallela ad AL; essendo EG, EF eguali, e parimente ED, EA eguali, resteranno DG, AF eguali, e perciò DG con DA, cioè GA, eguale ad AF con DA, cioè ad FD; e perchè anco FK è eguale ad AF il rettangolo DK fatto da DF, FK sarà eguale al rettangolo, che si farebbe da GA, AF. Ma il rettangolo di GA, AF è eguale al quadrato di AB (articolo 175), cioè al quadrato AC; dunque anco il rettangolo DK è eguale al quadrato AC, e toltone la parte comune DL, resta il rettangolo LC eguale al quadrato AK. Dunque (articolo 176) come BC, cioè AB ad AL, così AL ad LB; il che era da fare &c.

Pro-

Problemi, che riguardano la divisione della circonferenza del circolo, e la costruzione delle figure regolari.

214 LA metà della circonferenza del circolo, cioè gradi 180 si determina tirandone un diametro. La quarta parte, cioè gr. 90, tirando un altro diametro perpendicolare al primo. L'ottava parte, che è di gr. 45, dividendo a mezzo l'angolo compreso da' suddetti diametri, e così di tutte le altre suddivisioni per metà cioè gr. 22°. 30'; 11°. 15' &c., come è noto per le cose dette ne' primi libri di questi elementi. Per trovar ora la terza, la sesta, la duodecima, e le altre parti della circonferenza, che da queste dipendono, suddividendo per metà, cioè a dire i gradi 120°, 60°, 30°, 7°, 30' &c. si applichi primieramente sulla periferia del circolo in B C (*Fig.* 156.) il semidiametro di esso A B, e l'arco sotteso B C sarà la stessa parte della periferia; imperocchè congiungendo A C, è manifesto per la costruzione, che il triangolo A B C sarà equilatero, e perciò ciascuno degli angoli di esso, come B A C sarà la terza parte di due retti, cioè gradi 60. Dunque l'arco B C sarà di gradi 60, cioè un sesto di tutta la periferia. Prendendo poscia l'arco C D eguale a C B, sarà B D gradi 120, cioè il terzo della periferia. E dividendo per mezzo C B in E, sarà E B il dodicesimo di essa, cioè gradi 30, e di nuovo dividendo per mezzo E B, si avranno altre, ed altre suddivisioni della circonferenza. Onde è manifesto potersi avere tutte le parti di questa, che sono denominate da' numeri di questa serie geometrica, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. in infinito, come pure di quest'altra, 3, 6, 12, 24, 48, 96 &c. in infinito, le quali amendue crescono in ragione doppia.

215 Per trovar poscia la quinta parte della circonferenza del circolo, e susseguentemente la decima, la ventesima, e tutte le altre denominate da' numeri di questa serie geometrica crescente in ragione doppia, in infinito, 5, 10, 20, 40, 80 &c., cioè gr. 72, 36, 18, 9, &c. dividete il semidiametro di esso A B (*Fig.* 157) nel punto C in tal maniera, che A C sia media proporzionale fra A B, e B C (articolo 213), il che fat-

to

to applicate fulla periferia del circolo la retta BD eguale ad AC. Dico, che l'arco BD è la decima parte della periferia, cioè gradi 36; onde prefo l'arco DE eguale a BD, verrà ad effere l'arco BE la quinta parte di effa, cioè gradi 72. Imperocchè effendo per la coftruzione BA:BD::BD:BC i triangoli BAD, BDC avranno i lati proporzionali intorno ad un angolo comune B, e perciò faranno equiangoli [articolo 184]. Ma BAD è ifofcele per la coftruzione; dunque anco BDC è ifofcele, e il lato CD eguale a BD, cioè a CA, e perciò farà ifofcele eziandio il triangolo CDA. Ciò pofto effendo gli angoli CAD, CDA eguali fra loro, ed effendo BCD efterno eguale a' due fuddetti interni, egli farà doppio di CAD. Dunque anco CBD, che è uguale a BCD, farà doppio di CAD. E perchè CBD, o fia ABD è eguale ad ADB, i due ABD, ADB faranno infieme quadrupli di CAD, o fia di BAD; onde fe la fomma de' tre angoli ABD, ADB, BAD, che è di 180 gradi, s'intenderà divifa in cinque parti eguali, l'angolo BAD farà una di quefte parti, cioè gradi 36. Il che era da dimoftrare.

216 Da ciò fi raccoglie il modo di trovar eziandio la decima quinta parte della circonferenza, come pure la trentefima, e le altre fummultiplici nella ferie 15, 30, 60 &c., cioè i gradi 24, 12, 6, 3, &c. Imperocchè trovata, che fia (per l'articolo 214) la terza parte della circonferenza AB (*Fig.* 158), che è di gradi 120, e la quinta AC, che è di gradi 72 (per l'articolo 217), il refiduo CB farà di gr. 48, e la metà di effo DB di gr. 24, che è la decimaquinta parte, dalle quali, dividendo fempre per metà, fi avrà la trentefima e feffantefima, e le altre dette di fopra. Con artificio non diffimile fi poffono trovare molte altre parti della circonferenza.

217 Non oftante, che per le cofe dette fi poffano avere infinite divifioni della periferia del circolo, ne rimangono, nulladimeno infinite altre, che non poffono averfi co' metodi finora efpofti. A cagion d'efempio non è poffibile trovare, per le cofe fin quì fpiegate, la fettima parte della periferia, nè la nona, nè l'undecima, nè la tredicefima, nè la decifettefima &c., nel che è d'avvertire, che ficcome per ritrovare

la

la quinta parte si è fatto (all' articolo 215) un triangolo isoscele, che ha gli angoli alla base doppj dell' angolo verticale, così per trovare la settima parte converrebbe far un isoscele, che avesse gli angoli alla base tripli del verticale; mentre in tal modo intendendo la somma de' tre angoli del triangolo, che è di gr. 180, divisa in sette parti, sei ne toccherebbero agli angoli sulla base, e una al verticale, il quale sarebbe perciò la settima parte di gr. 180, e il doppio di esso la settima parte della periferia. Nell' istesso modo per aver la nona parte di questa, converrebbe far un triangolo isoscele cogli angoli alla base quadrupli dell' angolo verticale, e così negli altri casi. Il metodo di fare questi triangoli isosceli, che abbiano gli angoli alla base moltiplici in qualsivoglia ragione dell' angolo verticale, dipende dalla invenzione di due, o più medie continuamente proporzionali, fra due linee date, i quali problemi (come i moderni Geometri hanno dimostrato) non possono sciogliersi col tirare solamente linee rette, e circoli (al che si riducono tutte le costruzioni fin' ora da noi praticate), ma richieggono la descrizione d' altre linee curve, e perciò non abbiamo per ora luogo a parlarne.

218 Una figura si chiama *iscritta* in un circolo, quando tutti gli angoli di essa sono nella periferia di questo; e *circoscritta* al circolo, quando tutt' i lati della figura toccano il circolo. All' incontro un circolo si chiama iscritto in una figura, quando egli tocca tutt' i lati di questa, e circoscritto alla figura, quando passa colla sua periferia per tutti gli angoli di essa.

219 Per iscrivere un poligono regolare di qualunque numero di lati in un dato circolo, basta saper trovare una tanta parte della periferia, quanto è il numero de' lati del poligono. Come se nel circolo ABC [*Fig.* 159] si dovesse iscrivere un pentagono regolare, trovata prima (articolo 215) la quinta parte della periferia AB, e quella cinque volte replicata in BC, CE, EF, FA, e tirate le corde AB, BC &c. è manifesto, che queste corde, sottendendo tutte archi eguali, sarebbero eguali, e che ciascun angolo, come ABC essendo in un segmento di due quinte parti della periferia sarebbe eguale a ciascun altro, e perciò il pentagono ABCEF sarebbe regola-

re, ed iſcritto nel circolo. Il medeſimo diſcorſo ſi applica a tutti gli altri poligoni regolari di qualſivoglia numero di lati; onde qualunque volta non ſi poſſa trovare la parte della periferia, che corriſponde al poligono da iſcriverſi, non ſi potrà queſto iſcrivere co' metodi fin' ora dati.

220 Per circoſcrivere ad un dato circolo A B C (*Fig.*160) un poligono regolare di ſpecie data, baſta ſaper iſcrivere nel medeſimo circolo un ſimil poligono ABCDE, e poſcia per tutti gli angoli di queſto tirare delle tangenti al circolo, le quali comprenderanno il poligono richieſto FGHIK. Imperocchè tirate dal centro L le rette LB, LG, LA, LF, LE, eſſendo le tangenti FA, FE eguali (articolo 84), ſaranno i tre lati del triangolo FEL eguali a' tre del triangolo FAL; e perciò l' angolo ALE doppio di ALF. Per una ſimil ragione ſarà ALB doppio di ALG, ed eſſendo ALE, ALB eguali (articolo 76), le metà ALF, ALG ſaranno eguali; onde ne' triangoli ALF, AGL, che hanno gli angoli in L eguali, e quelli in A retti, con un lato comune AL, i lati AG, AF, ſaranno eguali, ed AF ſarà metà di FG. Così pure ſi proverà FE metà di FK; e perciò eſſendo FA, FE eguali, ſaranno eguali FG, FK, e lo ſteſſo ſi moſtrerà di tutti gli altri lati del poligono circoſcritto, il quale perciò ſarà equilatero. Finalmente eſſendo i due angoli AFL, AGL eguali, e ciaſcuno di eſſi la metà de' due AFE, AGB, queſti ſaranno anch' eſſi eguali, e il poligono ſuddetto, oltre eſſere equilatero, ſarà anco equiangolo, e perciò ſarà regolare, e circoſcritto al circolo, il che &c.

221 Dato un poligono regolare ACEGI [*Fig.* 161] in ſcrivere in eſſo un circolo. Si dividano per metà due angoli del poligono vicini fra loro, come IAC, ACE, per le rette AO, CO, che concorranno in O. Tirando poſcia dal punto O ſul lato AC la perpendicolare OB, e ſul lato AI la perpendicolare OL, eſſendo, che ne' triangoli BAO, LAO gli angoli in A ſono eguali, quelli in B, ed L retti, e il lato AO comune, ſaranno OB, OL eguali. Per una ſimil maniera tirata la perpendicolare OD, ſi moſtrerà queſta eguale ad OB. Perchè poſcia (congiunta OE) i due lati AC, CE ſono eguali, come pure gli angoli ACO; ECO, e il lato CO comune,

ne, saranno egauli anco gli angoli CEO, CAO; onde essendo CAO metà di CAI, che è eguale a CEG, sarà anco CEO metà di CEG; e nello stesso modo si mostrerà tutti gli angoli del poligono restar divisi per metà dalle rette tirate ad essi dal punto O; onde procedendo, come sopra, apparirà, che tutte le perpendicolari OF, OH &c. tirate dal punto O sopra i lati del poligono sono fra loro eguali. Se dunque dal punto O, come centro si descriverà un circolo, che passi per lo punto L, egli passerà per tutti gli altri B, D, F, H, e per essere retti gli angoli, che si fanno in questi punti, il circolo suddetto toccherà i lati AI, AC &c. Dunque sarà iscritto al poligono ACEGI. Il che &c.

222 Circoscrivere un circolo intorno un dato poligono regolare ABCDE (*Fig.* 162). Si dividano per mezzo due degli angoli vicini del poligono, come EAB, ABC per le rette GA, GB le quali concorrono in G. Ciò fatto si mostrerà, come nel precedente articolo, che le rette tirate a ciascun altro angolo dal punto G, come GC, GD, GE, dividono per mezzo i detti angoli, e che esse sono tutte eguali fra loro; e perciò è manifesto, che un circolo descritto dal centro G per lo punto A passerà per tutti gli altri angoli del poligono, e sarà circonscritto al medesimo. Il che &c.

223 Sopra una data retta AB (*Fig.* 163) descrivere un poligono regolare di specie data. Facciasi un circolo di qualsisia semidiametro CM, e prendasi tanta parte della periferia di esso MN, quanto è il numero de' lati del poligono da descriversi; il che si farà per le regole date all' articolo 214, e seguenti, eccettuandone i casi espressi all' articolo 217, ne' quali si è detto ciò non potersi fare per mezzo di circoli, e di rette linee. Congiunta poscia MN, e tirate le rette CM, CN facciansi ne' punti A, B gli angoli DAB, DBA eguali agli angoli M, N, e dal punto D, ove concorrono le rette AD, BD, si descriva per A, o sia per B il circolo ABE. E' manifesto, che essendo l' angolo D eguale per necessità all' angolo C, quanta parte della periferia MNO è l' arco MN tanta parte della periferia ABE sarà l' arco AB; onde replicando AB in BG, GE &c. si farà un poligono regolare di tanti lati quanto è il numero, per cui MN misura il circolo, il che era da fare.

Problemi, che riguardano le figure simili rettilinee.

224 SOpra una data retta AB (*Fig.* 164) fare una figura simile ad una data MNOPQ talmente, che il lato AB sia omologo ad un dato lato di questa MN. Si risolva la figura data in triangoli. Quindi si faccia in A l'angolo BAE eguale ad NMQ; ed in B l'angolo ABE eguale ad MNQ; il che fatto, sarà il triangolo AEB equiangolo, e simile ad MNQ. Parimente sopra EB si facciano gli angoli BED, EBD, eguali agli angoli NQP, QNP; e così il triangolo EBD sarà simile a QNP; e nell'istesso modo proseguiscasi l'operazione, finchè vi abbiano triangoli nella figura data; il che fatto sarà la figura ABCDE quella, che si cerca, come si raccoglie dall'articolo 192.

225 Date due figure rettilinee M, N (*Fig.* 165) farne una terza simile alla M, ed eguale alla N. Sopra il lato AB della figura M facciasi un rettangolo AD eguale alla stessa figura [articolo 115], e sopra l'altro lato di questo BD, un altro rettangolo DC eguale alla figura N. Fra AB, BC si prenda la media proporzionale [articolo 202], che sia EF; e sopra EF facciasi la figura O simile alla data M, la quale abbia il lato EF omologo al lato AB (articolo 224). Dico, che O è la figura cercata. Imperocchè essendo EF media fra AB, BC, e le figure M, ed O simili co' lati omologhi AB, EF, starà M ad O, come AB a BC (articolo 194), cioè come il rettangolo AD al rettangolo DC [articolo 166], cioè come la figura M alla figura N. Stando dunque M ad O, come M ad N, è forza, che O, ed N sieno eguali. Dunque O, che già per la costruzione è simile ad M, è anco eguale ad N. Il che &c.

226 Far una figura simile ad una data P (*Fig.* 166.), e che abbia a questa la ragione data di S ad R. Facciasi come R ad S, così un lato AB della figura P alla quarta CD (articolo 203). Poscia fra AB, CD trovisi la media EF (articolo 202), e sopra EF si faccia la figura T simile a P. E' manifesto, che P starà a T, come AB a CD (articolo 194), cioè per la costruzione, come R ad S. Il che era da fare.

227

227 Fare una figura ſimile alla data I (*Fig.* 167), e che abbia ad un' altra figura data K la data ragione di M ad L. Facciaſi prima il rettangolo AE eguale alla figura K, ſopra qualſivoglia linea AB (articolo 115). Poſcia facciaſi come L ad M, così AB ad AC (articolo 203), e tirata CD parallela a BE ſia compito il rettangolo AD. Sarà dunque AD ad AE, come AC ad AB [articolo 166], cioè come M ad L; e perchè AE è uguale alla figura K, ſtarà anche il rettangolo AD alla figura K, come M ad L. Se dunque ora ſi farà (per l' articolo 225) la figura P ſimile alla I, ed eguale al rettangolo AD, avrà la figura P alla figura K la ragione di M ad L, e ſarà quella, che ſi cerca.

228 Date due figure ſimili C, D (*Fig.* 168) farne un' altra ſimile ad eſſa, ed eguale ad amendue preſe inſieme. Si diſpongano i lati omologhi delle figure C, D per modo, che comprendano l' angolo retto FEG, e ſopra l' ipotenuſa FG ſi faccia la figura H ſimile alle dette figure (articolo 224), il cui lato FG ſia omologo a' lati FE, EG: dico, che queſta è eguale ad amendue C, D preſe inſieme. Imperocchè la figura H ſta alla figura C (articolo 194), come il quadrato di FG al quadrato di FE; e parimente l' iſteſſa figura H ſta alla figura D, come il quadrato di FG al quadrato di GE. Dunque H ſta a C con D, come il quadrato di FG a' due quadrati di FE, GE. Ma il quadrato di FG ſta a' due quadrati di FE, GE in ragione di egualità (articolo 69). Dunque anco la figura H alle due figure C, D preſe inſieme avrà ragione di egualità. Il che &c.

229 Se ſi voleſſe una figura ſimile a due date, ed eguale non alla loro ſomma, ma alla loro differenza, il problema ſi ſciorrebbe, come ne' quadrati ſi è fatto all' articolo 119, e la dimoſtrazione ſarebbe facile da trovare alla maniera di quella dell' articolo antecedente.

230 E ſe ſi voleſſe una figura eguale alla ſomma di tre, o più figure date, tutte ſimile fra loro, e ſimile anch' eſſa alle medeſime, ciò parimente ſi otterrebbe, come ne' quadrati ſi è detto all' articolo 118.

Fine degli elementi de' piani.

ELE-

Fig. 150.

Fig. 151.

Fig. 152.

Fig. 153.

Fig. 157.

Fig. 158.

Fig. 154.

Fig. 161.

Fig. 162.

Fig. 164.

Fig. 165.

Fig. 167.

Fig. 168.

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

DE' SOLIDI.

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA DE' SOLIDI.
LIBRO I.

Delle sezioni, e delle inclinazioni delle linee co' piani, e de' piani fra loro.

NOi supporremo in primo luogo come assai chiare per se medesime alcune proposizioni, le quali da tutti si confessano, e riconoscono per vere, con tutto che sia più facile il crederle tali, che il dimostrarle; cioè.

1 Che tutt' i piani, che passano per due punti passino eziandio per quella linea retta, che congiunge questi due punti, per modo che ciascuno punto di essa si trovi in ciascuno di questi piani.

2 Che due linee rette, le quali si taglino in un punto, sieno amendue in un medesimo piano, e che ogni retta, la quale tagli due parallele, sia nel medesimo piano di queste.

3 Che dati in qualsivoglia modo tre punti, questi siano sempre in un medesimo piano, cioè nel piano del triangolo, che si fa dalle rette, che congiungono i detti punti.

4 Che quando due piani fra loro si tagliano, la comune sezione loro sia una linea retta posta in amendue i detti piani.

Delle linee perpendicolari a' piani.

5 CIò posto, una linea retta dirassi *perpendicolare ad un piano*, o pure *retta a quel piano*, quando essa comprenda angoli retti con tutte le rette linee, che in esso piano possono tirarsi per quel punto, in cui la detta retta lo incontra;

 dac-

dacchè ſi vede manifeſto, che per un medeſimo punto d'un piano, non può tirarſi altro che una linea, che a quel piano ſia retta.

6 Quando una retta AB [*Fig.* 1] è perpendicolare in B a due rette CD, OS, che ſi incontrano nel detto punto B, ella ſarà neceſſariamente retta al piano GH, che paſſa per le dette due linee CD, OS. Imperocchè prendendo ſopra CD le due BC, BD eguali fra loro, e tirando AC, AD, queſte due ſaranno fra loro eguali [art. 49 degli elementi de' piani]. Parimente prendendo BO, BS eguali fra loro, ſaranno anco eguali AO, AS; di più congiungendo OC, CS, SD, DO, è facile il moſtrare, che ODSC ſarà un parellelogrammo (art. 49 elem. de' piani), e gli angoli OSC, SOD, come pure CDO, DCS eguali, e parimente i lati CS, OD, e OC, DS eguali; e perciò ne' due triangoli AOD, ACS, che hanno i tre lati eguali, gli angoli ASC, AOD ſaranno anch' eſſi eguali [art. 51 el. p.]; e così pure accaderà riſpettivamente de' triangoli AOC, ADS. Dunque ſe ora per lo medeſimo punto B paſſerà qualſivoglia altra retta KBE poſta nel medeſimo piano GH, e che tagli due de' lati del detto parallelogrammo, verbi grazia OD, CS, in E, K, ne' triangoli oppoſti al vertice OBE, KBS ſi troverà BE eguale a KB, e KS eguale ad OE (art. 50. el. p.), e congiunte KA, FA, ne' triangoli KAS, OEA, che hanno gli angoli KSA, EOA già moſtrati eguali, e le linee KS, OE, come pure AS, AO parimente trovate eguali, ſaranno eguali KA, EA. Dunque finalmente ne' triangoli KBA, EBA i tre lati ſono eguali, e perciò (art. 51 el. piani) anche gli angoli ABK, ABE eguali, cioè retti. Il medeſimo ſi moſtrerà di tutte le altre linee, che nel piano GH ſi potranno tirare per lo punto B; dunque [art. 5] la retta AB è retta al piano GH.

7 Se una retta AR (*Fig.* 2) ſarà perpendicolare a tre rette, AB, AC, AF nel punto del loro comune concorſo A, queſte tre rette ſaranno tutte in un medeſimo piano. Imperocchè, ſe a cagione d'eſempio una di eſſe AB foſſe fuori del piano delle altre due AC, AF, intendendo tirato per eſſa, e per R il piano RAB, che tagliaſſe nella retta AO il piano delle due AC, AF, ſarebbe l'angolo RAO retto; perocchè

RA

RA essendo perpendicolare alle due AC, AF, è retta al piano FAO (art. 6). Ma anche RAB si suppone retto; dunque il tutto, e la parte sarebbero eguali; il che è impossibile.

8 Due rette AB, CD (*Fig.* 3), che sieno perpendicolari al medesimo piano EF, saranno fra loro parallele. Imperocchè congiunti colla retta BD i punti B, D, ne' quali esse incontrano il detto piano, è manifesto, che ciascuno degli angoli ABD, CDB sarà retto [art. 5]; e perciò amendue insieme sono eguali a' due retti; onde le linee AB, CD saranno parallele fra loro (art. 28 el. p.), purchè si provi, che amendue sieno in un medesimo piano, il che così proveremo. Tirisi nel piano EF la retta GD perpendicolare a BD, e di lunghezza eguale a BA, e congiunganfi BG, GA, DA. Ne' triangoli rettangoli ABD, BDG fatti sul lato comune BD, e che hanno gli altri lati BA, DG eguali, le ipotenuse AD, BG sono eguali [art. 49. el. p.]. Dunque ne' triangoli AGB, ADG tutti e tre i lati saranno eguali, e perciò (art. 51 el. piani) gli angoli ABG, ADG eguali; ma ABG è retto; perocchè la linea AB si suppone retta al piano BDG (art. 5): dunque anco ADG sarà retto. Ora poichè anco CD si suppone retta al medesimo piano, sono eziandio retti CDB, CDG; dunque la retta GD fa angoli retti nel punto D colle tre linee, BD, AD, CD. Dunque (art. 7) queste tre rette sono in un medesimo piano. Ma nel piano, in cui sono BD, AD, vi è anco AB (art. 3). Dunque CD è nel medesimo piano di AB, il che rimaneva da provare.

9 E all' incontro se di due parallele AB, CD si saprà, che una, come CD, sia perpendicolare al piano EF, anco l' altra AB sarà perpendicolare a questo. Perocchè, fatta la costruzione di prima, essendochè l' angolo CDB è retto (art. 5), e le due CD, AB sono parallele, sarà retto eziandio ABD. Ne' triangoli dunque rettangoli ABD, BDG si mostrerà, come poc' anzi, essere BG eguale ad AD; e di nuovo ne' triangoli ABG, AGD si inferirà, come prima, l' angolo ABG eguale all' ADG. Ora poichè CD, BD, AD sono in un medesimo piano (cioè in quello delle parallele AB, CD), e la retta GD fa angolo retto colla BD, per la costruzione, e colla CD per la supposizione (art. 5), essa farà angolo retto

 ezian-

eziandio colla terza AD (art.6); dunque ADG è retto; e perciò ABG, che gli si è mostrato eguale, anch' esso è retto. Fa dunque la retta AB angoli retti colle due BG, ED poste nel piano EF: dunque ella è retta a questo piano, il che era da mostrare.

Delle linee parallele in diversi piani.

10 SE due rette linee AB, CD (*Fig.* 4) saranno parallele ad una terza EF, ancorchè il piano di AB, EF sia diverso da quello di CD, EF, saranno tuttavia AB, CD fra lo o parallele. Imperocchè preso in EF qualsivoglia punto G, e tirate da esso le perpendicolari GH, GI sopra AB, CD, e congiunta HI, è manifesto, che essendo retto l' angolo AHG, lo sarà anche l' angolo EGH, a cagione delle parallele EG, AH. Nell' istesso modo si troverà retto l' angolo EGI: Dunque la retta EG, che fa angoli retti colle due GH, GI poste nel piano GHI, è retta a questo piano (art. 6). E perciò anco le due AH, CI, che si suppongono parallele ad EG, saranno rette al medesimo piano (art. 9), e perciò saranno fra loro parallele (art. 8).

11 Se in un piano ACB (*Fig.* 5) saranno due rette AC, CB, che concorrano in C, e in un altro piano DEF, due altre DF, FE, che concorrano in F, e le due prime saranno parallele alle due ultime, cioè AC a FD, e BC ad EF; dico, che gli angoli ACB, DFE saranno eguali. Imperocchè prese le porzioni eguali AC, FD, come pure CB, FE, e tirate tutte le linee, che la figura dimostra, essendo AC, FD parallele, ed eguali, saranno anche AD, CF parallele, ed eguali (art. 59 el. p.). Nel medesimo modo si mostreranno parallele, ed eguali le due BE, CF. Dunque (art. 10) BE, ed AD sono parallele, e di più sono eguali; e perciò saranno ancora eguali AB, DE (art. 59 el. p.). Ne' triangoli dunque ACB, DFE ciascun lato è eguale a ciascun lato, e però l' angolo ACB eguale al DFE (art. 51 el. p).

De' piani perpendicolari ad altri piani.

12 UN piano diceſi *perpendicolare*, ovvero *retto ad un altro piano*, quando tutte le linee rette, tirate in uno di eſſi piani, e perpendicolari alla comune ſezione di queſti, ſaranno rette all' altro piano.

13 Ogni volta, che una retta linea AB [*Fig. 6*), che ſia in un piano EG ſarà retta ad un altro piano DC, anche il piano EG, in cui è quella retta, ſarà retto a queſto piano medeſimo DC. Perciocchè ſe AB è retta al piano DC, ella ſarà perpendicolare alla comune ſezione BG, de' due piani EG, DC; giacchè queſta comune ſezione paſſa per lo punto B, in cui eſſa AB incontra il piano DC (art. 5); laonde preſo in queſta retta BG qualſivoglia altro punto diverſo da B, come H, e tirata nel piano EG la retta HI perpendicolare a BG, ſaranno i due angoli ABH, IHB retti, e le linee AB, IH parallele (art. 51 el. p.). Ora AB, ſi ſuppone retta al piano DC; dunque anco HI parallela ad AB è retta al medeſimo piano (art. 9). Nel medeſimo modo ſi moſtrerà, che ogni altra linea tirata nel piano EG, e che ſia perpendicolare alla comune ſezione de' piani ſuddetti BG, ſarà retta al piano DC. Dunque il piano EG è retto al piano DC (art. 12).

14 Da ciò ſi deduce, che quando una retta AB è perpendicolare ad un piano DC, tutt' i piani, che paſſano per eſſa AB, ſono perpendicolari al medeſimo piano DC; giacchè di tutti può dimoſtrarſi quello, che nell' antecedente articolo ſi è dimoſtrato nel piano EG.

15 E all' incontro ſe due, o più piani, che tutti ſieno retti ad un altro piano, avranno per comune ſezione una medeſima retta linea, queſta ſarà anch' eſſa retta al detto piano, a cui que' piani ſi ſuppongono retti.

16 E ſe un piano ſarà retto ad un altro, ogni linea, che ſi tiri in uno di queſti retta all' altro piano, caderà nella comune ſezione di eſſi piani.

De'

De' piani paralleli fra loro.

17 P*Iani paralleli* diconſi quelli, che prodotti da qualſivoglia parte mai non concorrono inſieme.

18 E' manifeſto, che quando una medeſima retta linea ſia retta a due piani, queſti ſaranno fra loro paralleli; e che quando due piani ſieno fra loro paralleli ogni linea, che ſia retta ad uno di eſſi, ſarà retta anche all' altro.

19 Se due rette linee BA, CA (*Fig.* 7), che concorrano in A, ſaranno parallele a due altre FD, DE, che concorrano in D, anche il piano delle due prime ſarà parallelo al piano di queſte. Imperocchè ſe dal punto A s' intenderà tirata la retta AG perpendicolare al piano EDF, e che lo incontri nel punto G, e per queſto punto ſi tireranno nel piano EF le due rette GI, GH parallele a DF, DE, ſaranno queſte (art. 10) parallele eziandio ad AC, AB. Eſſendo per tanto gli angoli IGA, HGA [art. 5] retti, dovranno eſſer retti anco gli angoli CAG, BAG [art. 28 el. p.], e perciò AG ſarà (art. 6.) retta al piano CB; onde eſſendo ella per la coſtruzione retta anco al piano EF, i piani CB, EF ſaranno paralleli (art. 18).

20 Se due piani AB, CD (*Fig.* 8) fra loro paralleli verranno tagliati da un altro piano HG, le comuni ſezioni di queſto co' detti piani, cioè le rette EH, GF ſaranno parallele. E la ragione ſi è; perchè non eſſendo parallele, dovrebbero concorrere in un punto, il che non può ſuccedere ſenza, che in quel punto ſi vengano a toccare i due piani AB, CD, che ſi ſuppongono paralleli, cioè non mai concorrenti.

21 Se tre piani fra loro paralleli PQ, RS, TV (*Fig.* 9) taglieranno due rette linee BD, HG in qualſivoglia modo ſituate, ſempre le taglieranno in parti proporzionali. Imperocchè tirando da' punti B, D a' punti H, G le rette BH, DG, e congiungendo BG, la quale tagli in F il piano RS, e dalle ſezioni C, L delle rette BD, HG con queſto piano tirando LF, CF, è manifeſto, che il piano del triangolo BDG, che taglia i piani paralleli RS, VT, farà le ſezioni DG, CF parallele fra loro (art. 20); dunque (art. 182 el. p.) ſarà BC: CD :: BF: FG. Parimente ſi moſtrerà, che il piano del trian-

triangolo BGH farà le fezioni FL, BH parallele, e perciò HL:LG::BF:FG; Ma fi è moftrato BC:CD::BF:FG; Dunque HL:LG::BC:CD; il che era da dimoftrare.

Delle linee inclinate a' piani, e de' piani inclinati fra loro.

22 QUando una linea retta non è perpendicolare, o fia retta ad un piano, col quale effa concorra, dicefi *inclinata a quel piano*.

23 Se da qualfivoglia punto B (*Fig.* 10) della linea AB, inclinata al piano DC fi intenderà tirata BE retta al medefimo piano, e dal punto E, in cui quefta incontra il detto piano, fi tirerà la retta EA al punto A, in cui lo incontra la retta BA, l'angolo acuto BAE chiamerafsi *inclinazione della linea* BA *al piano* DC.

24 Se in vece di B fi prenderà qualfivoglia altro punto nella retta AB, o nel prolungamento di effa, come P, da cui fi tiri un'altra linea retta al piano DC, quefta caderà in un punto M della retta EA; perocchè effendo BE, PM rette al piano DC faranno parallele fra loro (art. 8); dunque le tre rette EB, BP, PM faranno in un medefimo piano [art. 2]. Ma il piano di BE, BP è il piano del triangolo BEA; dunque PM è nel piano di quefto triangolo. Dunque effendo il punto M per la fuppofizione anco nel piano DC, egli farà nella comune fezione de' due piani EBA, e DC, cioè nella retta EA.

25 Da ciò fi raccoglie, che da qualunque punto dell' inclinata AB fi tiri la perpendicolare BE ful piano DC, l' inclinazione refterà fempre determinata, e mifurata dal medefimo angolo BAE.

26 Quando due piani AB, DC (*Fig.* 11) fi tagliano nella comune fezione DE, e uno di effi non è retto all' altro, fi chiamano *inclinati fra loro*.

27 Se per un medefimo punto F della detta comune fezione fi tireranno due perpendicolari ad effa, una nel piano AB, che fia FG, l' altra nel piano DC, che fia FH, l' angolo acuto HFG, comprefo da quefte perpendicolari, è quello, che dirafsi *inclinazione* de' fuddetti due piani. 28

28 Qualunque punti si prendano nella comune sezione DE (*Fig.* 12) di due piani inclinati BA, DC, come F, G, se per essi punti si tireranno nell'uno, e nell'altro piano le perpendicolari alla detta sezione, cioè HF, IG nel piano DC, ed FK, GN nel piano BA, l'angolo dell'inclinazione HFK, IGN sempre si troverà della medesima quantità, o misura. Imperocchè essendo le due HF, IG in un medesimo piano, e perpendicolari alla medesima retta DE, saranno fra loro parallele, e per la medesima ragione saranno anco parallele fra loro KF, NG. Dunque abbiamo due linee concorrenti nel piano HFK, cioè HF, FK, e due altre nel piano IGN, cioè IG, GN, e le due prime sono parallele alle due ultime rispettivamente, e perciò gli angoli HFK, IGN (art. 11) sono fra loro eguali.

29 Due linee si dicono *egualmente*, o *similmente inclinate ad un piano*, quando gli angoli della loro inclinazione sono eguali. Così pure due piani similmente, o egualmente inclinati ad un altro, quando le loro inclinazioni sono eguali.

30 Se due linee saranno fra loro parallele, AB, CD (*Fig.* 13), esse saranno egualmente inclinate ad uno stesso piano FG. Imperocchè prendendo in esse due porzioni BA, DC, e da' punti A, C intendendo cadere sul piano FG le due DE, CH, rette al piano FG, saranno queste parallele fra loro (art. 8). Ma anco AB, CD si suppongono parallele; dunque abbiamo due piani, cioè i triangoli BAE, DCH in ciascuno de' quali sono due linee concorrenti BA, AE, e DC, CH, che a due a due sono parallele; e perciò (art. 11) gli angoli A, C sono eguali. Congiungendo dunque EB, EH, ne' triangoli AEB, CDH, che hanno gli angoli E, H retti, e gli angoli A, C eguali, anco gli altri due B, D, cioè le inclinazioni delle dette rette col piano FG (art. 23) saranno eguali. Nel che è da avvertire, che questa proposizione convertendola non si verifica, cioè, che due linee egualmente inclinate ad un medesimo piano non sono necessariamente parallele.

31 Se due piani EI, GK (*Fig.* 14) saranno fra loro paralleli, le loro inclinazioni con qualsivoglia terzo piano AB, saranno eguali. Imperocchè essendo le sezioni di essi col piano AB, cioè le rette EF, GH necessariamente parallele (art. 20),

preso

preso in EF qualunque punto C, e tirata nel piano AB la retta CDP, perpendicolare ad EF, essa sarà eziandio perpendicolare a GH nel punto D, nel quale l'incontra. Intendansi ora per li punti C, D le due NC, OD rette al piano AB, esse saranno per necessità parallele (art. 8); onde NCDO sarà un solo piano (art. 2). Tagli questo piano i piani EI, GK nelle rette CL, MD, e queste saranno fra loro parallele (art. 20). E perchè NC è retta al piano AB, sarà l'angolo NCF retto, (art. 5); onde essendo anche retto per la costruzione l'angolo FCD, la retta CF sarà necessariamente retta al piano NCD (art. 6): Dunque (art. 5) ella sarà perpendicolare alla CL, che è posta nel piano NCD. Nel medesimo modo si mostrerà essere DH perpendicolare a DM. Dunque (art. 27) gli angoli LCD, MDP sono le inclinazioni de' piani EI, GK col piano AB. Ma gli angoli LCD, MDP sono eguali; perocchè LC, MD si sono mostrate parallele; Dunque le inclinazioni suddette sono eguali, il che &c. Quì ancora è da avvertire, che la conversa di questa proposizione non è vera, cioè, che due piani egualmente inclinati ad un terzo non sono necessariamente paralleli.

Degli angoli solidi.

32 QUando tre, o più piani tagliandosi fra di loro vengono a concorrere in un medesimo punto, diconsi contenere, o comprendere in quel punto un *angolo solido*, come (*Fig* 15) i piani ABC, ACD, ABD nel punto A.

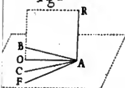
33 Quando un angolo solido A è fatto dal concorso di tre piani, allora i tre angoli rettilinei, che si fanno nel punto A, presi a due a due sono sempre maggiori del terzo. Sia a cagione d'esempio l'angolo BAD (*Fig.* 16) il massimo de' tre BAD, BAC, CAD; dico, che ciò non ostante egli è minore de' due BAC, CAD presi insieme; imperocchè tirata nel piano BAD la retta AE, che faccia l'angolo BAE eguale a BAC, e presa AE eguale ad AC, e finalmente tirata per E la retta BED, che tagli AB, AD in B, D, se si congiungeranno BC, DC, ne' due triangoli BAC, BAE, è manifesto (art. 49 el. p.), che le basi BE, BC saranno eguali. Mettendo dunque da una parte BC con CD, che (per l'art. 43 el. p.) sono maggiori di

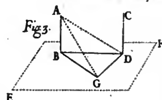
BD, e dall'altra BD, e levando poſcia da quelle BC, e da queſta BE, che ſi è moſtrata eguale a BC, il rimanente CD ſarà maggiore del rimanente DE. Ne' triangoli dunque CAD, EAD, che hanno il lato comune AD, e i lati eguali AC, AE, ma la baſe CD è maggiore della baſe ED, facilmente ſi vede (art. 49 el. p.), che l'angolo DAC è maggiore di EAD. Ma BAC è eguale a BAE per la coſtruzione; dunque i due BAC, DAC ſono maggiori di BAD.

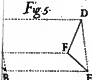
34 Tre angoli piani BAC, CAD, DAB, che concorrono a comprendere un angolo ſolido A (*Fig.* 15), ſono ſempre minori di 4 retti. Perocchè intendendo un piano, che tagli le tre rette AB, AC, AD, ne' punti B, C, D, è manifeſto, che ne' punti B, C, D ſi faranno tre altri angoli ſolidi, e che i due angoli piani ABD, ABC ſaranno maggiori del ſolo CBD (art. 33); per l'isteſſa ragione ADB, ADC ſono maggiori di BDC, e finalmente DCA, BCA maggiori di DCB; dunque i ſei angoli ABD, ABC, ADB, ADC, DCA, BCA, ſono maggiori de' tre CBD, BDC, DCB, cioè maggiori di due retti (art. 37 el. p.). Ma i ſei angoli ſuddetti, inſieme co' tre BAC, CAD, DAB (art. 37 el. p.) non vagliono più, che ſei retti, dunque queſti tre non arrivano al valore di quattro retti.

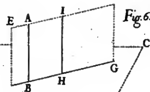
35 L' iſteſſo diſcorſo può applicarſi a qualunque numero d'angoli piani ſi uniſcono a farne un ſolido; mentre ſi moſtrerà ſempre, che tutt' inſieme non arrivano a quattro retti; e ciò col fondamento di ciò, che ſi è dimoſtrato all' art. 71 el. p.; cioè a dire, che gli angoli di qualſivoglia poligono tutt' inſieme vagliono tanti retti, quanto è il doppio del numero de' lati, meno quattro. Come ſe l'angolo ſolido F (*Fig.* 17) ſarà compreſo da 5 piani, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tirando un piano, che tagli tutte le rette, che concorrono in F, ſi avrà un poligono di 5 lati, o ſia un pentagono, i cui angoli vagliono 6 retti, e col diſcorſo fatto di ſopra ſi troverà, che gli angoli de' 5 triangoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, che toccheranno il detto poligono vagliono più di ſei retti, onde gli altri angoli de' medeſimi triangoli, che ſono in F non arriveranno a 4 retti, giacchè tutti gli angoli di 5 triangoli debbono fare dieci retti.

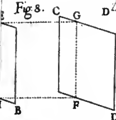
35 Da ciò ſi raccoglie, che volendo comporre un angolo ſolido cogli angoli piani di più figure regolari ſimili fra loro, ciò

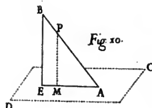

Fig. 2.
R
B
O
C
F
A

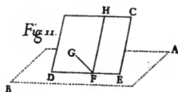

A
C
Fig. 3.
F
B
D
G
E

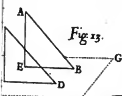

Fig. 5.
D
F
B
E

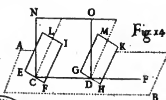

E
A
I
Fig. 6.
C
G
B
H
D


Fig. 8.
C
G
B
F
D


B
P
Fig. 10.
C
E
M
A
D


H
C
Fig. 11.
A
G
D
F
E
B


A
Fig. 13.
G
E
B
D


N
O
L
M
Fig. 14.
A
I
K
E
G
C
F
D
H
P
B

ciò non potrà farsi, che, o con tre angoli di pentagono, ciascuno de' quali vale gr. 108, e in conseguenza tre vagliono gr. 324, o con tre angoli di quadrato, che sono gr. 270, o con tre angoli di triangolo equilatero, che sono gr. 180, o con quattro di triangolo equilatero, che sono gr. 240, o finalmente con 5 pure di triangolo equilatero, che fanno gr. 300. Ogni altra combinazione, che si faccia degli angoli di qualsivoglia numero di questa, o d'altre figure regolari tutte simili fra loro, per accoppiarle insieme non se ne potrà mai ricavarne un angolo solido; mentre ne risulterà sempre la somma degli angoli piani, che si accoppieranno insieme, o eguali, o maggiore di quattro angoli retti.

Problemi spettanti alle inclinazioni delle linee, e de' piani.

37 DAto il punto C (*Fig.* 18) fuori del piano AB, tirare per quello una linea, che sia retta a questo piano. Si segni nel piano AB, qualsivoglia retta linea EF; e nel piano ECF si tiri dal punto C sopra di essa la perpendicolare CD, alla quale per lo punto D si tiri nel piano AB la perpendicolare DK, e finalmente nel piano CDKE si tiri alla DK la perpendicolare CK. Dico, che questa sarà retta al piano AB. Imperocchè tirata per K la retta GK parallela ad EF; poichè per la costruzione gli angoli EDC, EDK sono retti, la retta ED sarà retta al piano CDK (art. *6*); dunque anche GK, che è parallela a ED, sarà retta allo stesso piano (art. *9*): dunque l'angolo GKC sarà retto (art. 5); ma anco CKD è retto per la costruzione; dunque (art. *6*) la retta CK è retta al piano DKG, cioè al piano AB.

38 Dato il punto A (*Fig.* 19) nel piano EF tirare per esso punto una linea retta al detto piano. Prendasi qualunque punto D fuori del piano, e da esso si tiri (art. 37) DB retta al piano EF. Quindi congiunta BA, si tiri AC parallela a BD. E' manifesto, che AC sarà anch'essa retta al piano EF (art. *9*).

39 Per un punto dato A (*Fig.* 20), ovvero B tirare un piano retto ad un dato piano DE. Si tiri per lo punto dato

una linea AB retta al dato piano, e ciò per l'art. 37, o 38 secondo che il dato punto è sul piano medesimo, o fuori di esso. Allora segnando sul dato piano qualsivoglia retta linea BC, che passi per lo punto B, ove la detta retta lo incontra, il piano ABC sarà retto al piano DE (art. 13). Quindi anche s'intende, come per una retta BC data sul piano DE, o pure per una data AB, che sia retta al detto piano DE, si tiri il piano ABC retto al medesimo piano.

40 Dato il piano AC (*Fig.* 21) retto al piano DF, ed in esso il punto K fuori della comune sezione de' piani GC; tirare per K nel piano AC una retta inclinata al piano FD con angolo eguale al dato angolo acuto H. Si tiri prima per K la linea KI retta al piano FD (art. 37), che sarà nel piano AC (art. 1), e nel medesimo piano AC si tiri KO, che faccia con KI l'angolo IKO eguale al complemento di H, e che tagli IC, in O; è manifesto, che KO sarà l'angolo d'inclinazione KOI eguale al dato H (art. 37 el. p.).

41 Dato il piano IK [*Fig.* 22) retto al piano BD, e nella loro comune sezione KF dato il punto G, tirare per G una retta inclinata al piano con angolo acuto eguale al dato H. E' manifesto, che se nel piano IK si tirerà per G la retta OG, che faccia l'angolo OGK eguale al dato H, sarà OG la retta, che si cerca; mentre preso in essa qualsivoglia punto O, e tirata OP retta al piano BD, questa cadrà nella retta FK; onde l'angolo OGK sarà l'inclinazione di OG col piano BD [art. 23].

42 Per un dato punto C (*Fig.* 23) posto fuori del piano KG tirare un piano parallelo a questo. Si tirino prima nel piano KG due rette AD, DB, che concorrono in qualsivoglia punto di esso D, e congiunta DC, si tiri per C nel piano ADC la retta FC parallela a DA, e parimente per C nel piano BDC la retta CE parallela a DB. E' manifesto, che il piano FCE sarà parallelo al piano ADB, cioè al piano KG (art. 19).

43 Per una data retta AB (*Fig.* 24) posta nel piano CD far passare un piano, il cui angolo d'inclinazione col piano CD sia eguale al dato H acuto. Si tiri nel piano CD per qualsivoglia punto K della retta AB la perpendicolare ad essa

GK;

GK; e preso in questa un punto G si alzi GF retta al piano CD, e nel piano FGK, che sarà retto a CD (art. 13), tirisi la KF, che faccia in K colla KG l'angolo FKG eguale al dato H; è chiaro, che AK sarà retta al piano FKG, e l'angolo AKF sarà retto; onde il piano, che passa per AB, KF sarà quello, che si cerca (art. 27).

44 Dato il punto A (*Fig.* 25) fuori del piano KG, per lo qual punto passi il piano AB retto a KG, far passare per lo medesimo punto A un altro piano, che insieme sia retto al piano AB, e inclinato al piano KG con inclinazione eguale al dato angolo acuto H. Si tiri dal punto A la perpendicolare AC alla comune sezione CB de' due piani AB, KG, e fatto nel piano AB, l'angolo CAD eguale al complemento dell' angolo H, per lo punto D, in cui AD incontra la detta comune sezione, si tiri nel piano KG la retta ED, perpendicolare a CB. Dico, che il piano, che passa per AD, DE soddisfa al problema. Perocchè facilmente si raccoglie dalle cose dette, che l'angolo ADC è quello della sua inclinazione col piano KG, e che quest' angolo è eguale al dato H, e che finalmente il piano EDA è retto al piano AB.

45 Data la retta AB (*Fig.* 26), la cui inclinazione al piano KG sia l'angolo ABC, far passare per essa un piano, che abbia al medesimo piano KG inclinazione eguale al dato angolo H maggiore di ABC. Prendasi nella retta AB qualsivoglia punto A, da cui si tiri AC retta al piano KG; e nel piano ABC si tiri per A la retta AD, che comprenda con CA l'angolo CAD eguale al complemento di H, e segni BC in D: quindi col centro C, e coll' intervallo DC si segni nel piano KG il circolo DE, a cui per lo punto B si tiri la tangente BE. Dico, che il piaho ABE è quello, che si cerca. Perocchè congiunta EC, essendo gli angoli DCA, ECA retti, e le rette DC, EC eguali, e CA comune, è manifesto, che ne' triangoli DCA, ECA, l'angolo CEA sarà eguale a CDA, che per la costruzione viene ad essere eguale all' angolo H. Ed essendo il piano AEC retto a KG, la retta BE, che fa l'angolo BEC colla comune sezione di questi piani EC retto, sarà retta ad esso piano AEC (art. 13). Dunque l'angolo BEA è retto (art. 5); perciò AEC sarà l'inclinazione del piano BEA col

col piano B E C, cioè col piano K G. Ma A E C ſi è moſtrato eguale all' angolo H; dunque il piano A B E ha col piano K G inclinazione eguale ad H, e per altro egli paſſa per la linea A B; dunque egli è quello, che ſi cerca. E' d' avvertire, che ſe l' angolo H foſſe minore di A B C, il ſuo compimento C A D, ſarebbe maggiore di C A B, onde il punto D non cadrebbe fra C, e B, ma oltre il punto B, e perciò reſtarebbe dentro il circolo D E, ne potrebbe allora tirarſi la tangente B E, e così la ſoluzione del problema ſarebbe impoſſibile.



LL

LIBRO II.

De' prismi, e de' prallelepipedi.

46 PRisma è una figura solida contenuta da più figure piane rettilinee, due delle quali fra loro opposte, sono eguali, simili, parallele, e similmente poste. A misura, che queste sono di tre, quattro, cinque, o più lati, i prismi si dicono *triangolari*, come A [*Fig.* 27], *quadrangolari*, come B *pentagonici*, come C &c.

47 E' evidente, che gli altri piani, che oltre i due suddetti comprendono il prisma, sono parallelogrammi qualunque sia la figura de' detti piani: altrimenti se verbigrazia nel prisma CED [*Fig.* 28] il piano CABD non fosse un parallelogrammo, cioè AB non fosse parallela a CD, concorrerebbe la retta AB colla CD in qualche punto, e in conseguenza il piano della base AEB concorrerebbe col piano della base CHD, a cui si suppone parallelo. Se dunque AB è parallela a CD, dovendogli per altro esser eguale (altrimenti non sarebbero le figure AEB, CHD, eguali, simili, e similmente poste) saranno anche parallele AC, BD; onde il piano ACBD sarà un parallelogrammo [art. 59 el. p.]

48 *Parallelepipedo* è una figura solida contenuta da sei piani quadrilateri, de' quali gli opposti fra loro a due a due sono paralleli.

49 E' manifesto, che tutt' i piani, che comprendono un parallelepipedo sono parallelogrammi, e che gli opposti a due a due sono simili, eguali, e similmente posti. Perocchè il piano AF (*Fig.* 29) tagliando i due piani paralleli BD, FH farà le sezioni BA, FE tra loro parallele (art. 20). L' istesso piano AF tagliando gli altri due piani paralleli AH, BG farà le sezioni AE, BF parallele: dunque AF sarà un parallelogrammo, e l' istesso si troverà degli altri cinque piani, che formano il parallelepipedo. Di più essendosi mostrate AB, BC parallele ad EF, FG, saranno gli angoli ABC, EFG eguali [art. 11]; onde essendo inoltre il lato AB eguale al EF, e BC egua-

eguale ad FG i due parallelogrammi BD, FH saranno eguali; e simili, e similmente posti.

50 Da ciò segue, che ogni parallelepipedo non è, che una specie di prisma, che ha per base due parallelogrammi [art. 46].

51 Un parallelepipedo; che venga contenuto da sei quadrati eguali, chiamasi *cubo*, e perciò anche il cubo cade sotto la specie de' prismi, cadendo sotto quella de' parallelepipedi [art. 50.]

Delle proprietà principali de' prismi.

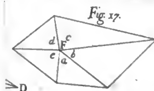
52 TRa le figure solide rettilinee, *simili* si chiamano quelle, che sono contenute da un egual numero di figure piane, ciascuna simile alla sua corrispondente.

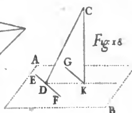
53 Tra le medesime figure quelle si chiameranno *eguali*, e *simili*, che sono contenute da un egual numero di figure piane, ciascuna simile, ed eguale alla sua corrispondente.

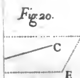
54 Se un parallelepipedo, o altro prisma ABCDEF [*Fig*.30] sarà tagliato da un piano HGK, parallelo a' piani opposti, e paralleli fra loro BAC, EDF, che comprendono il prisma, la sezione HGK sarà eguale, e simile ad essi piani ABC, EDF. Perrocchè non può la retta HK concorrere nè con DE, nè con AB senza, che il piano HGK concorra col piano EDF, o coll'ABC, a' quali si suppone parallelo; onde sarà HK parallela a DE; ed essendo anche DA parallela ad EB (art.47), sarà HD un parallelogrammo, nel quale il lato HK sarà eguale ad ED. Per l'istessa ragione i lati KG, HG sono eguali a DF, FE, ed a CA, CB, e così degli altri lati se si trattasse di un prisma compreso da basi di più lati; onde facilmente si raccoglie, che la figura piana HKG è simile, ed eguale ad EDF, o sia ad ABC.

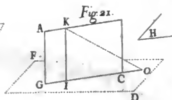
55 Da ciò segue, che quando un prisma è tagliato da un piano parallelo a' piani opposti, come HKG, ne risultano due altri prismi AHG, KEF contenuti da due piani opposti simili, ed eguali ai primi BAC, DEF.

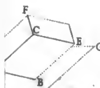
56 Se un parallelepipedo, o altro prisma sarà tagliato, come sopra, i due prismi, che ne risulteranno AHG, KEF staranno fra loro nella proporzione delle basi BG, HF. Questa pro.

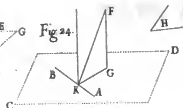

Fig. 17.
d
c
F
e
b
a
D

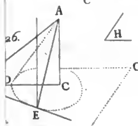

C
Fig. 18
A
G
E
D
K
F
B

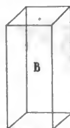

Fig. 20.
C
E

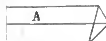

Fig. 21.
A
K
H
F
G
I
C
O
D


F
C
E
G
B


F
Fig. 24.
H
D
B
G
K
A
C


A
26.
H
G
D
C
E


B
Fig. 27.


A

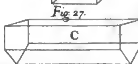

C

Fig. 27.

proposizione si dimostrerà nel medesimo modo, che all' articolo 166, e al 167 degli elementi piani fu dimostrato, che i triangoli, e i parallelogrammi di egual altezza stanno fra loro, come le basi; perocchè presa una comune misura (almeno infinitamente piccola) delle rette DK, HE, e divise con questa misura amendue le dette rette, e tirati per ciascuna divisione de' piani paralleli a' due opposti ABC, DEF, si risolverà l'uno, e l'altro prisma in piccoli prismi, i quali facilmente si mostreranno eguali fra di loro, come quelli, che saranno contenuti da' parallelogrammi tutti rispettivamente eguali, e da figure simili, ed eguali alle due ABC, DEF (art. 53, e 55), e il rimanente della dimostrazione procederà, come ne' detti articoli 166, e 167 degli elementi de' piani.

57 In ogni parallelepipedo AB (*Fig.* 31), se si tireranno le diagonali HB, AG di due de' parallelogrammi opposti DE, FC, che passino per gli angoli DHE, FAC, che si fanno agli estremi della medesima retta HA, le dette due diagonali HB, AG saranno in un medesimo piano, e comprenderanno colla detta retta AH, e coll' opposta per diametro BG un parallelogrammo AHBG. Perocchè essendo le due HA, BG parallele alla terza DF, saranno parallele fra loro (art. 10), e perciò saranno in un medesimo piano; ed essendo per altro eguali (come quelle, che si agguagliano alla terza DF), sarà AHBG un parallelogrammo.

58 Il piano, che passa per le dette diagonali, cioè AHBG, dividerà il parallelepipedo in due prismi triangolari ABDG, ABCG, che saranno eguali, e simili fra loro; perocchè, come facilmente si vede, essi sono contenuti da un egual numero di piani, cioè da cinque, de' quali AHBG è comune ad amendue i prismi, e gli altri sono eguali, e simili, ciascuno al suo corrispondente, cioè GE ad HF; AE ad FB; AGC, ad AFG, ed HBE ad HDB; dunque (art. 53) i detti prismi sono eguali, e simili.

De' parallelepipedi d' egual altezza.

59 Altezza d' un parallelepipedo è la linea retta perpendicolare a' due de' piani oppoſti d' eſſo parallelepipedo.

60 Quando (*Fig.* 32) due parallelepipedi ABCDHEFG, ed ABCDKILM hanno la baſe comune ABCD, e ſono compreſi fra' medeſimi piani paralleli ABCD, LMHE, cioè hanno una comune altezza, allora, ſe eſſi parallelepipedi ſaranno anche compreſi fra' medeſimi due piani laterali DHMA, CELB, ſaranno tra loro eguali. Imperocchè ſi moſtrerà, che i due priſmi CDEK, BAFM, eſſendo contenuti da un egual numero di piani tutti ſimili, ed eguali, ſaranno fra loro eguali; onde aggiungendo all' uno, ed all' altro comunemente il ſolido CDKIGFAB, ne verranno i due parallelepipedi, de' quali ſi tratta, anch' eſſi eguali. Se poi (*Fig* 33) i piani laterali CEFB, CILB, come pure DHGA, DKMA foſſero diverſi, nulladimeno, prolungando le linee EF, HG, finchè incontrino LM in N, O, ed IK in P, Q, è manifeſto, che PNOQ ſarà un parallelogrammo eguale, e ſimile ad ABCD, e poſto nel piano del parallelogrammo IKML parallelo a queſto; onde congiungendo PC, QD, NB, OA, ſi troverà, che il ſolido NOQP ſarà un altro parallelepipedo fatto ſulla medeſima baſe de' due primi ABCD, e poſto fra' medeſimi piani paralleli AC, OI; e che queſto parallelepipedo paragonato con ABCDHEFG ſi trova con eſſo anche fra' medeſimi due piani laterali DHAO, CENB, e paragonato con ABCDKILM, ſi trova pure con queſto fra' medeſimi due piani laterali LB AO, ICDQ; onde ſarà, come poc' anzi ſi è moſtrato, eguale all' uno, ed all' altro di queſti parallelepipedi, i quali ſaranno per conſeguenza eguali fra loro. Generalmente dunque due parallelepipedi fatti ſulla medeſima baſe, e fra' medeſimi piani paralleli, ſono fra loro eguali.

61 Due parallelepipedi, che abbiano le altezze eguali, e le baſi (cioè i parallelogrammi, a' piani de' quali è perpendicolare la detta altezza) parimente eguali, ſaranno anch' eſſi fra loro eguali, ancorchè le dette baſi foſſero di figura diſſimile.

Sieno i due parallelogrammi MH, GE, (*Fig.* 34) eguali fra

fra loro, e ciascuno di questi s' intenda esser base d' un parallelepipedo con altezza eguale alla retta S; e poniamo in primo luogo, che amendue i detti parallelepipedi abbiano i lati perpendicolari alle dette basi MH, GE. Si costituiscono i lati GM, GF di queste basi indiritto fra loro nel punto comune G, e per M tirando PMQ parallela ad RGL, si compisca il parallelogrammo MR, i cui lati PM, RG taglino KH in Q, L. E finalmente sopra le basi GP, GQ s' intendano fatti due altri parallelepipedi coll' altezza eguale ad S, e co i lati perpendicolari alle basi suddette. Ciò posto il parallelepipedo sopra GQ starà al parallelepipedo sopra GP, come GQ a GP, ed il parallelepipedo sopra GE starà a quello sopra GP, come GE a GP (art. 56); ma GQ, GE sono eguali fra loro (per essere GE eguale a GK per la suppoſizione, e GQ eguale al medesimo GK per l' art. 64 el. p.). Dunque i parallelepipedi sopra GQ, GE sono eguali. Ma di nuovo il parallelepipedo sopra GQ è eguale a quello sopra MH (art. 60); dunque i parallelepipedi sopra GE, MH sono eguali. Il che &c. Se poi i lati de' parallelepipedi non fossero retti alle basi MH, GE, ma tuttavia avesse ciascun di loro altezza eguale ad S, si farebbero sopra di queste basi due altri parallelepipedi dell' altezza S, che avessero i lati retti alle basi, i quali sarebbero (come ora si è mostrato) eguali fra loro; onde dovendo essi parimente esser eguali a' due obbliqui (art. 60), anche i due obbliqui sarebbero eguali.

Della proporzione de' prismi di varie specie.

62 DUe Prismi triangolari ABCDQ, EFGHML (*Fig.*35) d'eguale altezza, nel primo de' quali il piano inferiore BD (che è un parallelogrammo, e che in lui si riguarda, come base, sia doppio di FGH (che è la base dell'altro, e che è un triangolo); due prismi, dico, che abbiano queste condizioni, sono fra loro eguali. Imperocchè il prisma ABCDQ è metà del parallelepipedo rappresentato colla figura 36, il quale si suppone formato coll'aggiugnere ad esso prisma ABCDQ la porzione BCQARZ simile, ed eguale a lui. Così pure il prisma EFGHML è metà del parallelepipedo della figura 37 formato coll'aggiugnere al medesimo prisma EFGHML la porzione GRSML a lui simile, ed eguale. Ma la base FR del parallelepipedo (*Fig.* 37) essendo un parallelogrammo doppio del triangolo FGH, per l'ipotesi, è eguale alla base BD dell'altro parallelepipedo (*Fig.* 36), e le altezze d'essi due parallelepipedi già si suppongono eguali. Dunque (art. 61) sì essi parallelepipedi, come le loro metà, cioè i due prismi ABCDQ, EFGHML sono fra loro eguali. Il che &c.

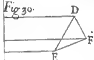
63 I prismi, che hanno basi eguali, ancorchè dissimili, e che hanno altezze parimente eguali, sono fra loro eguali. Siavi il prisma (*Fig.* 38) di qualsivoglia specie, verbigrazia pentagono, il quale abbia per altezza la retta S. Siavi ancora il prisma (*Fig.* 39) di qualsivoglia altra specie, verbigrazia eptagono, ed abbia anch'egli altezza eguale alla medesima retta S. Se il pentagono ABCDE, che è la base del primo, sarà eguale all'eptagono LMNOPQR, che è la base del secondo, cotesti due prismi saranno fra loro eguali. Costruiscasi il parallelepipedo, (*Fig.* 40) la di cui base HI sia eguale alla base ABCDE del primo prisma, e per conseguenza anche alla base LMNOPQR dell'altro prisma. Abbia inoltre anch'egli la stessa altezza S comune all'uno, ed all'altro prisma; e per maggiore facilità della dimostrazione sia egli retto, cioè abbia i suoi lati perpendicolari alla base HI. Ciò fatto, si dividano in triangoli i due piani opposti ABCDE, *abcde* del primo prisma col guidare a tutti gli angoli dell'uno è dell'altro

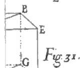
piano

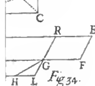
piano delle rette linee, che partano da uno degli angoli, che in essi piani si corrispondono, verbi grazia, col guidare dall' angolo B, le linee BE, BD e dall' angolo *b* le rette *be*, *bd*. E' certo, che la linea BE sarà parallela, ed eguale alla *be*, come pure la BD alla *bd*, e la sezione fatta da un piano, che passi per BE, *be*, che passi per BD, *bd* sarà parallelogrammo BE *eb*, il che si prova colla dimostrazione dell' art. 57. Condotti dunque cotesti piani per le predette linee, il primo prisma diviso in altrettanti prismi triangolari quanti sono i triangoli della base ABCDE, ed uno di essi prismi sarà BAE, *eba*, che viene rappresentato a parte nella figura 41. Ora il triangolo BAE, che è la base del prisma (*Fig.* 41), è sempre metà di un parallelogrammo AY fatto col guidare le linee, che lo comprendono, parallele a' lati dello stesso triangolo BAE, siccome lo mostra la stessa figura 41. Dunque se si costruirà un parallelepipedo, servendosi di cotesto parallelogrammo AY come di base, e guidando de' piani paralleli a' due AE *ea*, AB *ba* del prisma triangolare terminati da' due parallelogrammi opposti AY, *ay*; onde si dia anche a questo parallelepipedo l' altezza S, comune a' prismi primo, e secondo, verrà egli ad essere doppio del prisma triangolare BAE *eba* (art. 58). Ciò posto, se nella base HI del parallelepipedo (*Fig.* 40) si formerà un parallelogrammo HV eguale al parallelogrammo AY, che è la base del parallelepipedo (*Fig.* 41), e per lo punto V si condurrà un piano parallelo al piano HF *fh*, ne nascerà un nuovo parallelepipedo eguale al detto parallelepipedo (art. 61). Per lo che dividendo per metà nel punto Q il lato FV della base di questo nuovo parallelepipedo, indi per lo punto Q conducendo un altro piano parallelo allo stesso HF*fh*, quest' ultimo parallelepipedo HQ*qh* così formato, il quale sarà la metà dell' altro HV*uh* (art. 56) sarà necessariamente eguale al prisma triangolare BAE*eba*. Nella stessa maniera si proverà, che chi tagliasse un secondo prisma triangolare BED*dbe* dal primo prisma, anche questo sarebbe eguale ad un secondo parallelepipedo da segnarsi, come il primo nel parallelepipedo della *Fig.* 40, e lo stesso si proverà del terzo, del quarto, e di quanti altri prismi triangolari possano essere contenuti in esso primo prisma. Dunque essendo

ſendo la baſe ABCDE del primo priſma eguale alla baſe HI del parallelepipedo (*Fig.* 40), cioè contenendo quella appunto altrettanti triangoli quanti parallelogrammi eguali a ciaſcheduno d'eſſi ſono in queſta contenuti, è forza, che il medeſimo parallelepipedo contenga altresì tanti parallelepipedi quanti ſono i priſmi triangolari, in cui può dividerſi il primo priſma; Dunque l'uno è eguale all'altro. E perchè queſta coſtruzione, e queſto ſteſſo raziocinio può adattarſi al priſma ſecondo, paragonandolo debitamente col parallelepipedo [*Fig.*40], ne ſegue, che di lui pure vale queſta concluſione, cioè eſſere egli parimente eguale al medeſimo parallelepipedo (*Fig.* 40); Con che finalmente reſta provato, che i due priſmi primo, e ſecondo, i quali hanno baſi eguali, ancor che diſſimili, ed hanno altezza eguale, trovandoſi entrambi eguali ad un terzo ſono anche fra loro eguali. Il che &c.

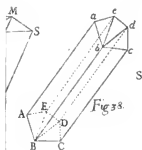
64 I priſmi d'eguale altezza, ma di baſe diſuguale ſtanno fra loro, come le baſi. Imperocchè ſe per eſempio il priſma (*Fig.* 42) avrà l'altezza S, che è la ſteſſa, che quella del priſma (*Fig.* 39); e ſe la baſe ABCDE del primo ſarà di grandezza diverſa, verbi grazia maggiore della baſe LMNNOPQR del ſecondo (ſieno, o non ſieno eſſe baſi di ſpecie fra loro ſimili), è chiaro che coſtrutto un parallelepipedo (*Fig.* 43), che abbia la baſe HI eguale alla baſe ABCDE del primo, e che ſia dell'altezza S, comune a' due propoſti priſmi, coteſto parallelepipedo ſarà eguale al priſma (*Fig.*42 art. 63). Se dunque ſarà condotta la retta QP parallela al lato HF della baſe dell'ultimo parallelepipedo in maniera, che ſi formi un parallelogrammo HQ eguale alla baſe LMNOPQR del priſma (*Fig.* 39), e ſe per li punti P, Q, ſarà condotto un piano parallelo al piano HF*fh*, il quale incontri il piano oppoſto alla baſe *hi* ne' punti *q*, *p*, e compiſca un parziale parallelepipedo HQ*qh* è chiaro, che queſto in vigore del medeſimo art. 63 ſarà eguale al priſma (*Fig* 39). Ma il parallelepipedo intiero HI*ih* ſta a queſto parziale parallelepipedo HQ*qh*, come il parallelogrammo HI al parallelogrammo HQ (art. 56), cioè come la baſe ABCDE del primo priſma alla baſe LMNOPQR dell'altro priſma. Dunque anche il primo priſma [che è eguale al parallelepipedo intiero HI*ih*] ſta all'altro


Fig 30.
D
F
E

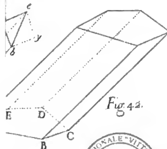

B
E
G
C
Fig 31.


R
E
G
F
H
L
Fig 34.


M
S


a
e
d
b
c
S
Fig 38.
A
E
D
B
C


e
y
b

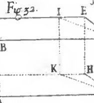

Fig 42.
E
D
C
B










L
F
Fig 32.
I
E
B
C
G
K
H
M
A
D


E
M
A
Q
L

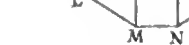

Fig 35.
S
D


F
G
H
B
C
r
q
p


l
m
n
o

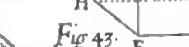

Fig 39.




R
Q
P
L
O
M
N


h
p
i
f
q




P
H
Fig 43.
F
Q
I



tro prisma (che è eguale al parallelepipedo parziale HQ*gh*), come la base ABCDE alla base LMNOPQR. Il che &c.

65 I prismi di base eguale, ma d'altezza disuguale stanno fra loro, come le altezze. Imperocchè se il prisma fatto sopra la base ABCDE (*Fig.* 44) avrà questa eguale alla base LMNOPQR, su cui si suppone fatto il prisma (*Fig.* 45) (siano, o non sieno fra loro simili coteste basi), e se l'altezza S di quello sarà, verbi grazia maggiore dell'altezza T di questo, costrutto il parallelepipedo [*Fig.* 46] il quale abbia la base HI eguale alla base di ciascheduno de' predetti due prismi, ed abbia la sua altezza eguale all'altezza S del primo prisma; se con un piano PQ parallelo alla base HI si taglierà esso parallelepipedo in maniera, che la porzione HIQP abbia la stessa altezza T dell'altro prisma, è chiaro, che essendo l'intiero parallelepipedo (*Fig.* 46) eguale al primo prisma [art. 62], ed il parallelepipedo parziale HIQP essendo per lo stesso articolo eguale al secondo prisma, questi due prismi staranno fra loro, come il parallelepipedo intiero (*Fig.* 46) alla sua porzione HIQP. Ma l'intiero parallelepipedo sta alla detta porzione, come l'altezza S all'altezza T (art. 56); cioè come l'altezza del primo prisma all'altezza del secondo: Dunque anche il primo prisma sta al secondo, come la linea S, che è l'altezza del primo, alla linea T, che è l'altezza del secondo. Il che &c.

66 I prismi d'altezza disuguale, e di base altresì disuguale stanno fra loro in ragione composta delle altezze, e delle basi. Imperocchè se vi sarà un prisma (*Fig.* 47), che abbia per base il rettilineo ABCD &c., e per l'altezza la retta S, ed un prisma [*Fig.* 48], che abbia per base il rettilineo LMN, e per l'altezza la retta T, costrutto il parallelepipedo (*Fig.* 49), il quale abbia la base HI eguale alla base ABCD &c. del primo prisma, e l'altezza eguale all'altezza dell'altro, è manifesto, che il primo prisma starà al detto parallelepipedo [con cui ha comune la base], come la sua altezza S all'altezza T di questo (art. 65); e lo stesso parallelepipedo starà al secondo prisma (con cui ha comune l'altezza), come la base HI di lui alla base LMN di questo (art. 64). Ora il primo prisma sta al secondo in ragione composta del primo prisma al

al parallelepipedo, e del parallelepipedo al secondo prisma (art. 161 el. p.). Dunque il primo prisma sta all'altro in ragione composta dell'altezza S del primo all'altezza T del secondo, e della base ABCD &c. del primo alla base LMN del secondo. Il che &c.

67 Da ciò si raccoglie, che se vi saranno due prismi (*Fig.* 47), e (*Fig.* 48) tali, che come sta la base AB &c. del primo alla base LM &c. del secondo, così reciprocamente stia l'altezza T del secondo, all'altezza S del primo (sì fatti prismi si chiamano *reciprochi*), allora essi due prismi saranno eguali. Imperocchè cotesti prismi reciprochi, non meno che tutti gli altri non reciproci, hanno fra loro la ragione composta delle altezze, e delle basi [art. 66.]. Ma è manifesto per la dottrina delle proporzioni, che la ragione composta di due ragioni tali, che una di esse, a prenderne i termini reciprocamente, sia eguale all'altra, è sempre ragione di egualità: come, per esempio, se le due ragioni 1, 2; 10, 5 sono tali, che a prendere reciprocamente i termini d'una di esse, verbi grazia i termini della prima, si formi una ragione (cioè quella di 2, 1), la quale sia eguale all'altra di 10, 5, sempre si trova, che la ragione composta delle predette due, 1, 2; 10, 5 (la qual ragione composta è quella di 10, 10), è ragione di egualità. E viceversa una ragione d'egualità può sempre riguardarsi, come composta di due ragioni tali, che una di esse, a prenderne i termini reciprocamente, sia eguale all'altra. E' dunque verissimo, che i prismi reciproci sono eguali.

68 All'incontro, se i detti prismi, saranno eguali, la base AD del primo, starà alla base LO del secondo reciprocamente, come l'altezza T di questo all'altezza S di quello, e però i prismi saranno reciproci. Imperocchè, siccome abbiamo avvertito nell'antecedente articolo, la ragione d'egualità si può sempre riguardare, come composta di due ragioni, la reciproca d'una delle quali sia eguale all'altra presa, come sta. E però se i prismi sono eguali (siccome ora lo supponiamo), essendo essi in ragione composta delle basi, e delle altezze (art. 66), è forza che, o la ragion delle basi sia eguale alla reciproca delle altezze, o la ragion delle altezze sia eguale alla reciproca delle

delle basi. Dunque se i prismi [*Fig.* 47, e 48] sono eguali, essi sono reciproci.

69 I prismi simili hanno fra loro ragione triplicata de' loro lati omologi. Imperocchè stando essi fra loro in ragione composta delle basi, e delle altezze (art. 66), e le basi per essere anch' esse simili stando in ragione duplicata di qualsivoglia loro lato al suo omologo, e la ragione di qualsivoglia lato della base al suo omologo essendo la stessa, che quella delle altezze de' prismi (art. 52), ne segue, che se si comporrà la ragione delle altezze con quella delle basi, cioè colla duplicata delle medesime altezze, si avrà la ragione triplicata delle altezze, o si avrà la ragione triplicata di qualsivoglia lato d'un prisma al suo omologo dell' altro prisma simile il che &c.

70 Se un parallelepipedo qualunque ABCDEFGH (*Fig.* 50) sarà tagliato da due piani; uno IKLM, che tagli i lati BA, CD, EH, FG de' parallelogrammi fra loro opposti, e paralleli ne' punti di mezzo I, K, L, M; l'altro NORQ, che tagli i lati BC, AD, EF, HG degli altri parallelogrammi parimenti fra loro opposti, e paralleli ne' punti di mezzo N, O, P, Q. Dico, che la comune sezione RS di cotesti due piani secanti, e la diagonale BE del parallelepipedo saranno tagliate nel loro punto di mezzo (la *diagonale*, o sia il *diametro* del *parallelepipedo* è una retta, come BE condotta da un angolo qualunque B del piano superiore all' angolo opposto E del piano inferiore parallelo a quello); imperocchè condotta nel piano superiore ABCD la diagonale BD, e formato con essa il triangolo BAD, è evidente, che la retta IK parallela al lato AD di cotesto triangolo BAD dee essere incontrata da essa BD nel punto di mezzo R, dovendo IR essere la metà di AD, siccome BI è la metà di BA. Per una simile ragione ON dee essere incontrata dalla medesima BD nel suo punto di mezzo R, (che è lo stesso, che il punto di mezzo di IK). Dunque la detta diagonale BD dee passare per lo punto R, in cui si tagliano le due rette IK, NO. Nella stessa maniera. Si mostrerà, che la diagonale GE dee passare per lo punto S, in cui si tagliano le due ML, PQ, che tagliano per mezzo i lati del piano inferiore EFGH. Ora coteste due diagonali

BD, GE congiungendo gli estremi B, D, G, E delle due rette GB, ED fra loro parallele, ed eguali saranno anch' esse fra loro parallele, ed eguali, e però il piano BDEG sarà un parallelogrammo, nel di cui piano trovandosi i due punti R, ed S della comune sezione de' due piani IKLM, NOPQ, vi si troverà anche tutta intiera essa comune sezione, cioè la linea RS. Similmente trovandosi nel piano di esso parallelogrammo BDEG li due estremi B, ed E del diametro BE si troverà anche in esso piano tutto il diametro medesimo BE, il quale per conseguenza taglierà la retta RS, e sarà da questa tagliato in qualche punto X comune ad esse linee, formando i due triangoli BRX, ESX; ora paragonando fra loro cotesti triangoli è evidente, che il lato BR del primo, è eguale al lato ES del secondo per essere cotesti lati metà di due rette eguali; l'angolo XBR del primo è eguale all'angolo XES del secondo per essere angoli alterni delle parallele BD, GE; e finalmente i due angoli, che in essi triangoli sono opposti per vertice nel punto X sono eguali fra loro; Dunque anche gli altri lati di essi triangoli sono fra loro eguali, cioè il lato RX del primo è eguale al lato SX del secondo, ed il lato BX, di quello è similmente eguale al lato EX di questo. Il che &c.

71 Sieno due prismi fra loro simili (art.52), e tagliato uno d'essi in due parti con un piano secondo qualsivoglia ragione, si tagli anche l'altro nella stessa ragione col fare in lui pure una simile sezione, per modo, che i lati dell'uno de' due prismi restino ad uno ad uno tagliati nella medesima ragione, in cui restano ad uno ad uno tagliati i lati omologi dell'altro. Ciò succederà qualunque volta avendo collocato i due prismi in maniera, che ciaschedun lato in uno d'essi sia parallelo al suo omologo nell'altro, anche i due piani, che tagliano nella medesima ragione due de' lati omologi vengano ad essere fra loro paralleli. In questo caso dunque è evidente, che qualunque sia per essere la figura de' solidi risultanti ne' due prismi da sì fatte sezioni (i quali solidi saranno due per ciaschedun prisma, uno di quà, e l'altro di là dal piano, che fa la sezione) si avrà sempre la seguente analogia cioè: come uno di cotesti prismi all'uno de' solidi in lui formato

mato per la detta ſezione: così l' altro priſma ſimile, al ſolido, corriſpondente a quello, in lui formato per la ſimile ſezione. Come, per eſempio, ſe il primo priſma ſarà ſimile al ſecondo priſma nelle Fig. 51, 52, 53, e fatta in quello la ſezione EGH ſe ne farà una ſimile ILM nell' altro di maniera che il lato AF nel primo priſma venga tagliato in E nella ſteſſa ragione, che il ſuo omologo XK nell' altro priſma, vien tagliato in I, il lato BD di quello venga tagliato nella ſteſſa ragione in G, che il ſuo omologo YO di queſto vien tagliato in L; e così degli altri ad uno ad uno, è chiaro, che riſultando nel primo priſma al di là dal piano EGH il ſolido PDFEHG, e nel ſecondo priſma al di là pure del piano ſecante ILM riſultando il ſolido VOKILM ſimile a quello; e parimente al di quà de' due piani ſecanti riſultando due altri ſolidi fra loro ſimili; ogn' uno de' due priſmi avrà la medeſima ragione al ſolido, che in lui verrà formato dalla ſteſſa parte del piano ſecante. Imperocchè codeſti ſolidi non ſolo ſono ſimili fra loro (paragonando quelli, che ſono dalla medeſima parte riſpetto al piano ſecante), ma ſono parti ſimili de' loro intieri; onde il teorema non può non eſſer vero, eſſendo in ſoſtanza l' inverſo dell' art. 143 degli elementi de' piani.

Della miſura de' priſmi, e del modo di eſprimerli per numeri.

72 Siccome ſogliono i Geometri per maggiore facilità ſervirſi di figure quadrate, verbi grazia d' once quadrate, di pollici quadrati, di piedi quadrati &c. per miſurare una propoſta ſuperficie, benchè per altro foſſe in loro arbitrio, adoprare qualſivoglia altra figura piana (art. 169 el. p.), e ſiccome codeſta miſura quadrata ſerve ad eſſi in luogo d' unità per formarne quel numero, con cui eſprimer vogliono la propoſta ſuperficie (art. 130 el. p); così ſogliono eſſi Geometri adoprare la figura cubica, verbi grazia l' oncia cubica, il pollice cubico, il piede cubico &c. per miſurare un dato ſolido, e coteſta miſura cubica, è quella unità, con cui eſſi formano l' eſpreſſione numerica del medeſimo ſolido. Ora noi in primo luogo faremo vedere, conforme a ciò, che fu dimoſtrato nel citato

articolo 169 degli elementi de' piani, che il numero delle unità, o delle frazioni d'unità cubiche comprese in un dato parallelepipedo, è quello stesso, che risulta dalla moltiplicazione di tre numeri, che esprimano le tre dimensioni di esso parallelepipedo, due delle quali dimensioni appartengano alla base, e l'altra all'altezza di lui. Dal che si potrà poi anche dedurre in qual maniera s'abbia a misurare, ed esprimere per numeri un prisma di qualsivoglia altro genere.

Sia per esempio da misurare, e da esprimere per numeri il parallelepipedo AG (*Fig.* 54), in cui prenderemo per base il piano AB, e per altezza la retta BG, supponendo per maggiore facilità, che i lati comprendano colla base angoli retti. Trovata (per l'art. 169 el. p.) l'espressione numerica della base AB, cioè trovato quel numero, che mostra quante unità quadrate intiere, e quante frazioni di tale unità si contengano in essa base, si applichi l'unità lineare, che ha servito per misurar la base, verbi grazia, la lunghezza XY, che supporremo esser un pollice, all'altezza BG, e fingiamo in primo luogo, che cotesto pollice replicato alcune volte, per esempio sette, misuri esattamente, e senza verun avanzo, detta altezza. Per tutt' i punti *m*, *n*, *g*, *p* &c., che sono i termini di ciaschedun pollice, si conducano de' piani paralleli alla base AB: questi divideranno il proposto parallelepipedo AG in altri parallelepipedi parziali, il primo de' quali cominciando a numerare dalla base sarà AXB*mst*, ed a questo tutti gli altri saranno eguali (art. 56), e questi saranno altrettanti, quanti sono i pollici contenuti nell'altezza BG, cioè sette. Inoltre per i punti *y*, *h*, K &c. del lato AX, conducendo de' piani paralleli al piano AV, terminati al piano superiore VD, e parimente per i punti 1, 2, &c. del lato AZ, conducendo de' piani paralleli al piano ZG, terminati al medesimo piano superiore VD, sì il primo parallelepipedo parziale A*x*B*mst* (il quale nella presente figura non è rappresentato tutto compito a fine d'evitare la confusione) sì dico, questo parziale parallelepipedo, come tutti gli altri eguali a lui, verranno divisi in un pari numero di cubi, che tutti avranno basi eguali ad uno de' quadrati della base, verbi grazia, al quadrato B*o*, e questi cubi saranno le unità cubiche

da

da esprimersi ogni una di esse col numero 1, appunto, come le quadrate. E le dette unità cubiche saranno tante quante sono le unità quadrate, eguali a B*o*, contenute nella base AB. Oltre le unità cubiche intiere, vi saranno di più in ciaschedun parziale parallelepipedo tante frazioni dell' unità cubica, cioè tanti solidi non cubici, ma parallelepipedi quante frazioni dell' unità quadrata si troveranno per avventura nella base AB. Ora è da osservarsi, che sì le frazioni cubiche, come le quadrate si esprimeranno pel medesimo numero rotto, o irrazionale. Imperocchè ogni cubo, ed ogni frazione cubica contenuta in qualsivoglia di cotesti parallelepipedi è dell' altezza dello stesso parallelepipedo, cioè d' un pollice: onde i cubi suddetti, cioè le unità, e le frazioni di queste, hanno fra loro la ragione delle basi (art. 56): si avrà dunque sempre la seguente proporzione. L' unità quadrata (che è la base della cubica, e si esprime col numero 1) sta alla frazione quadrata (che è la base della frazione cubica, e si esprime con un numero rotto, oppure con un sordo), come l' unità cubica (che si esprime anch' essa col numero 1) sta alla frazione cubica, la quale per conseguenza dovrà anch' essa esprimersi col numero rotto, o sordo della quadrata (art. 140 el. p.). Se dunque in ogni uno di codesti parziali parallelepipedi si contengono tante unità cubiche intiere, quante unità quadrate intiere si contengono nella base, e tante frazioni d' unità cubiche si contengono in esso parziale parallelepipedo, quante frazioni d' unità quadrate si contengono in essa base, e se tanto gl' intieri, quanto le frazioni deono esprimersi nel solido col medesimo numero, con cui si esprimono nel piano, è forza, che il medesimo numero, che esprime il piano della base AB di qualunque di cotesti parallelepipedi, esprima anche la solidità di lui. Dalchè finalmente si conchiude, che essendo tanti essi parallelepipedi quante sono le misure contenute nell' altezza BG, cioè sette, il numero, che esprime tutto intiero il parallelepipedo AG debba esser l' istesso, che quello risulta dalla moltiplicazione della base per l' altezza, che è lo stesso, che dire dalla moltiplicazione di tre numeri, due de' quali esprimano le due dimensioni della base AB, ed il terzo esprima l' altezza BG del medesimo parallelepipedo. Con poco dif-

differente maniera mostreremo l'istesso dover succedere se supporremo in secondo luogo, che il pollice non misuri esattamente l'altezza del dato parallelepipedo, il quale ora fingeremo essere non più A G, ma A *r* (*Fig.* 55), cioè coll'essere cresciuta la di lui altezza B G di tutta la porzione G *r* di modo che il pollice sia compreso in B *r*, verbigrazia, sette volte con di più l'avanzo *r* G minore dell'unità, e però da esprimersi con un numero rotto, o irrazionale. Imperocchè anche in questo caso, condotti de' piani paralleli alla base A B per tutt'i punti *m*, *n*, *g*, *p* &c. della divisione dell'altezza B *r*, siccome mostra la figura, il parallelepipedo A *r* sarà diviso in tanti parziali parallelepipedi, quanti sono i pollici contenuti in B G, che secondo la supposizione di prima saranno sette, e questi saranno tutti fra loro eguali. In oltre vi sarà un parallelepipedo *r* E d'altezza minore degli altri, cioè della sola altezza *r* G, ma però della medesima base, che gli altri. Dunque [art. 56] si avrà la seguente proporzione. Come qualsivoglia de' parallelepipedi parziali, verbi grazia A *x* B *st* (il quale per le cose poc'anzi dette, si esprime col numero medesimo, con cui si esprime la base A B di lui) sta al predetto parallelepipedo *r* E: così l'altezza di quello (cioè il pollice, che s'esprime nel numero 1) al numero, che esprime l'altezza di questo, qualunque egli sia razionale, o irrazionale. I termini della qual proporzione sono rappresentati da' seguenti numeri. 1. Dal numero, che esprime la base A B. 2. Dal numero, che dee esprimere il parallelepipedo *r* E, il qual numero ora si cerca qual sia. 3. Dall'unità cubica, che s'esprime pel numero 1. 4. Dal numero rotto, o irrazionale, che esprime l'avanzo *r* G dell'altezza. Per lo che moltiplicando i medj, e gli estremi della proporzione si deduce, che il numero, che esprime detto parallelepipedo *r* E, sia lo stesso, che il numero della base moltiplicato pel numero razionale, o irrazionale, che esprime l'avanzo *r* G. Ma poc'anzi abbiamo mostrato, che il parallelepipedo A G si esprime pel prodotto, che nasce dal moltiplicare A B per l'altezza B G. Dunque, se il proposto parallelepipedo A *r* non è altro, che il parallelepipedo A G unito al parallelepipedo *r* E, e quello è il prodotto della base A B per la parte B G dell'altezza, e questo è il

pro-

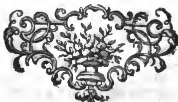
prodotto della stessa base AB pel rimanente *r* G della stessa altezza, è forza, che anche in questo caso il numero, che esprime il proposto parallelepipedo A *r* nasca dalla moltiplicazione di tre numeri, due de' quali esprimano la base AB, e l'altro l'altezza B *r*. Il che &c.

73 Quello, che si è finora provato de' parallelepipedi retti vale anche degli obbliqui, giacchè questi sono sempre eguali a quei parallelepipedi retti, che hanno base, ed altezza eguale alla loro: anzi vale generalmente di tutt' i prismi, qualunque sia la figura delle loro basi, giacchè ogni prisma è sempre eguale al parallelepipedo retto il quale abbia la base, è l'altezza eguale alla sua. Dunque generalmente, volendosi misurare, ed esprimere per numeri qualsivoglia prisma, ciò si farà col formare il prodotto, che nasce dalla moltiplicazione di tre numeri, due de' quali moltiplicati insieme esprimono il piano della base [art. 173 el. p.], ed il terzo esprime l'altezza di esso prisma.

74 Se vi saranno tre linee X, Y, Z (*Fig.* 56) in proporzione continua, e se vi sarà un parallelepipedo formato colle medesime tre linee, cioè in maniera, che un lato di lui, verbi grazia AE, sia eguale alla prima X, un altro lato AB eguale alla seconda Y, ed un terzo AD eguale alla terza Z; un tale parallelepipedo sarà eguale ad un altro LMNOQ, equiangolo a lui, ed i lati del quale siano tutti eguali alla retta Y, che è la media fra le tre proposte linee. Imperocchè essendo il parallelogrammo ED equiangolo al parallelogrammo QM, ed il lato AE di quello [che è eguale alla prima linea X] stando al lato LQ di questo (cioè alla seconda linea Y), come il lato LM di questo stesso parallelogrammo (cioè la medesima linea Y) al lato AD di quello, o sia alla terza linea Z) ne segue, che cotesti parallelogrammi, (che riguarderemo, come basi de' due parallelepipedi) saranno fra loro eguali [art. 179 el. p.]. Ora perchè l'angolo ABC del primo parallelepipedo si suppone eguale all'angolo LON del secondo, e le linee AB, LO sono entrambe eguali alla media Y (onde l'altezza de' due parallelepipedi è necessariamente la medesima) perciò ne segue essere i parallelepipedi fra loro eguali [art. 63] il che &c.

75 Così pure si dimostrerà, che se vi saranno tre numeri in proporzione continua, la solidità d' un cubo, che abbia per lato una linea espressa per quello de' tre numeri, che è il medio della proporzione sarà sempre eguale alla solidità d' un prisma di qualsivoglia genere, la base del quale sia espressa per lo prodotto di due de' dati numeri, qualunque essi sieno, e l' altezza sia espressa pel terzo: Il che non ha bisogno di prova, essendo sempre il prodotto degli estremi d' una proporzione continua di tre termini eguale al quadrato del medio, ed il medesimo prodotto degli estremi moltiplicato per lo medio, essendo sempre eguale al cubo d' esso medio. E però quei solidi, che saranno espressi per lo prodotto de' dati tre numeri saranno necessariamente eguali a quello, che è espresso per lo cubo del medio [art. 73].

76 Se quattro linee V, X, Y, Z (*Fig.* 57) saranno fra loro proporzionali, un prisma di qualunque genere fatto sopra la prima V, starà ad un simile prisma fatto sopra la seconda, X; come un terzo prisma, di genere differente da due primi, fatto sopra la terza Y, sta ad un quarto prisma dello stesso genere del terzo, e simile a lui, fatto sopra la quarta Z. Il che è evidente, perchè i prismi simili stanno fra loro in ragione triplicata, o vogliam dire, come i cubi de' loro lati omologi (art. *69*), e qualora quattro termini sono proporzionali, i quadrati, i cubi, e le altre loro potestà costituiscono altrettanti termini proporzionali. Dunque &c.



LI-

Fig. 46

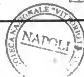
Fig. 47

Fig. 50

Fig. 51

Fig. 55

Fig. 56



LIBRO III.

De' solidi compresi da' piani non paralleli.

77 DEscritta in un piano una figura qualunque rettilinea ABCD &c. (*Fig.* 58), e fatta passare una retta linea per ciaschedun angolo A, B, C &c. d'essa figura, in maniera, che tutte coteste rette concorrano in un punto V esistente fuori del piano di quella, è chiaro, che quanti sono i lati AB, BC, CD &c. della figura predetta, altrettanti saranno i triangoli, che per simil guisa si formeranno, e che i varj piani ne' quali sono cotesti triangoli, s' uniranno tutti in quel punto V, in cui concorrono le rette AV, BV, CV &c., che passano per gli angoli della figura medesima. Ora il solido VABCD &c. compreso dalla descritta figura ABCD &c., e da tutti i suddetti piani triangolari ABV, BCV, CDV &c. si chiama *piramide*. Essa figura rettilinea ABCD dicesi *base della piramide*. Il punto V esistente fuori del piano della base, nel qual punto si uniscono tutte le rette AV, BV, CV &c., che passano per gli angoli di detta base, dicesi *vertice della piramide*. Ciascheduna di dette rette, AV, BV, DV &c. dicesi *lato della piramide*. Finalmente la distanza del vertice suddetto dal piano della base (la qual distanza si misura con una retta VP guidata da esso vertice perpendicolarmente sopra cotesto piano) dicesi *altezza della piramide*.

78 Le piramidi hanno nome differente secondo la differente specie del rettilineo, che ad esse serve di base. Se il rettilineo è triangolare, diconsi *piramidi triangolari*, come A, A &c. (*Fig.* 59). Se quadrilatero *quandrangolari*, come B, B &c. [*Fig.* 60] se pentagono, *pentagonie*, come C, C &c. (*Fig.* 61), e generalmente diconsi *poligone* quelle, la base delle quali è un rettilineo di più di quattro lati.

79 Quando un rettilineo serve di base tanto ad una piramide quanto ad un prisma, onde tutti gli angoli della base di quella concorrano cogli angoli della base di questo, e quando inoltre il vertice della piramide concorre anch' esso con uno

degli angoli del piano opposto alla base del prisma, allora la piramide dicesi *iscritta in esso prisma*; e per lo contrario il prisma dicesi *circoscritto intorno ad essa piramide*. Tale è la piramide quadrangolare ABCDE (*Fig. 62*), rispetto al prisma AFGHEDCB. E' però d'avvertirsi, che intorno all'uso di queste appellazioni, si prendono talora i Geometri qualche licenza.

80 Proposta qualsivoglia piramide, verbigrazia ABCDE, (che per maggior chiarezza supporremo anche quì quadrangolare), ed assegnato in essa qualunque lato ad arbitrio, verbigrazia il lato AB, se per ciaschedun angolo B, C, D, E della base si condurrà una retta parallela, ed eguale ad esso lato AB, indi per lo vertice A della piramide si condurrà un piano AFGH parallelo alla base BCDE (il quale passerà necessariamente per tutte le estremità delle predette parallele, ed eguali al lato assegnato AB) è manifesto, che verrà a formarsi un prisma AFGHEBCD, il quale sarà circoscritto intorno ad essa piramide. E' altresì manifesto, che tanti di cotesti prismi potranno circoscriversi intorno a quella, quanti saranno i lati, ch'ella avrà, cioè quanti saranno gli angoli della base; e che tali prismi circoscritti saranno tutti fra loro eguali (art. 63), benchè variamente inclinati al piano della lor base. Per lo contrario in qualsivoglia prisma si potranno iscrivere tante piramidi tutte insistenti alla medesima base, cioè a quella dello stesso prisma, quanti saranno gli angoli di questa, mentre dovendo essere altrettanti, anche gli angoli del piano opposto ad essa base, ogn'un di questi potrà servire di vertice ad una nuova piramide iscritta nel medesimo prisma, la quale si formerà col condurre da cotesto vertice una retta a tutti gli angoli della base, per lo che ognuna di coteste nuove piramidi verrà ad essere iscritta nel medesimo prisma. Dunque di coteste piramidi se ne possono formar tante appunto quanti sono gli angoli della base del dato prisma.

Del-

Delle proprietà principali delle piramidi.

81 SE si taglierà una piramide qualunque ABCDE [*Fig.*63] con un piano parallelo alla base di lei, verbi grazia col piano FGHI, la parte d'essa piramide, compresa fra detto piano secante FGHI, ed il vertice A, sarà una nuova piramide simile alla proposta ABCDE. Imperocchè la comune sezione del detto piano secante, e di qualsivoglia de' piani triangolari, che comprendono la piramide, verbi grazia la sezione FG, che è quella del detto piano secante, e del piano triangolare ABC, sarà parallela alla retta BC, che è la base di esso piano triangolare ABC (art. 20). Lo stesso si dirà di tutte le altre linee GH, HI, IF rispetto alle basi CD, DE, EB; Per la qual cosa essendo simili i triangoli ABC, AFG; ACD, AGH; ADE, AHI; AEB, AIF, e così tutti gli altri [se più ve ne fossero] si avrà la seguente analogia AF : AB :: FG : BC :: AG : AC :: GH : CD :: AH : AD :: HI : DE &c. dunque dovendo necessariamente essere eguali di numero i lati della piramide intiera ABCDE, e quei della nuova piramide AFGHI, e trovandosi sempre in quelli la stessa proporzione rispetto a questi [paragonati però fra loro secondo, che essi si corrispondono] ne segue, che coteste piramidi siano fra loro simili (art. 52).

82 Se il piano secante GHIKL (*Fig.*64) parallelo alla base BCDEF della piramide ABCDEF, taglierà per metà i lati di questa, o, ciò che è lo stesso, taglierà per mezzo l'altezza di lei, ne seguirà, che la detta piramide intiera ABCDEF sarà ottupla della parte recisa AGHIKL (la quale rimane dalla parte del vertice A), onde quella conterrà questa otto volte. Ciò si dimostra, perchè circoscrivendo in qualsivoglia maniera (art. 79) un prisma *Acdef*FEDCB intorno alla data piramide ABCDEF, e circoscrivendone un altro *Ahi*KL KIHG intorno alla piramide parziale AGHIKL (i quali due prismi si rappresentano nella figura mediante i due soli piani opposti a fine d'evitare la confusione, ma deono concepirsi entrambi co' lati paralleli ad uno stesso lato della piramide, cioè nel caso della presente figura paralleli al lato AB)

R 2 cote-

cotesti due prismi in simil guisa formati, essendo fra loro simili (art. 52) sono altresì fra loro in ragione triplicata de' loro lati omologi (art. 69), ovvero (per essere i lati dell'uno doppj de' lati dell'altro) in ragione triplicata di 2 ad 1, cioè in ragione semplice di otto ad uno. Ma il prisma *Acdef* FEDCB ha la stessa ragione alla piramide intiera ABCDEF in lui iscritta, che il prisma *Ahi*K*l*LSHIK alla piramide parziale AGHIKL in lui iscritta (art. 71). Dunque alternando, anche la piramide ABCDEF ha la stessa ragione alla piramide AGHIKL, che hanno fra loro i predetti due prismi, cioè la triplicata de' loro lati omologi, la quale è quella di otto ad uno. Dunque la piramide ABCDEF contiene otto volte la piramide AFHIKL: Il che &c.

83 Qualora la proposta piramide ABCD [*Fig.* 65] tagliata nel mezzo della sua altezza AP dal piano EFG parallelo alla base di lei è di specie triangolare, e che per uno de' punti di mezzo de' lati di essa, verbi grazia per lo punto G, si fa passare un piano GHI, che incontri i punti di mezzo H, I de' lati CD, DB della base BDC, è manifesto, che viene a formarsi dalla parte inferiore una nuova piramide GHDI, anch' essa triangolare, la quale è simile, ed eguale alla piramide superiore AEFG, che rimane dalla parte del vertice A; è però essa pure è l' ottava parte della piramide intiera ABCD. Imperocchè il lato GD della piramide inferiore è eguale al lato AG della superiore: il lato GI di quella è eguale al lato AE di questa (per essere entrambi eguali alla retta EB, a cui il lato GI è parallelo): il lato GH di quella è eguale al lato AF di questa (per una ragione simile alla precedente): è finalmente i lati HD, DI, IH, della base di quella sono eguali a' lati FG, GE, EF della base di questa, presi con quest' ordine con cui quì si sono enunciati. Dunque, essendo inoltre manifesto, che ciaschedun angolo di quella è eguale al suo corrispondente di questa (mentre essi sono fatti da linee fra loro parallele) è altresì manifesto, che le predette due piramidi AEFG, GHDI, sono fra loro simili, ed eguali; e però l' una, e l' altra è l' ottava parte della intiera piramide ABCD.

84 Il solido poi, che rimane, detratte dall' intiera piramide

de ABCD le due parziali piramidi AEGF, GIHD, cioè a dire il ſolido EFGIHCB (il quale contiene ſei ottavi dell' intiera piramide) può dividerſi in due priſmi triangolari fra loro eguali, ognun de' quali contiene per conſeguenza tre ottavi di tutta la piramide intiera. Coteſta diviſione ſi fa col condurre per i due punti F, G, un piano, che incontri la baſe BCD ne' punti K, ed I, (che ſono quei di mezzo de' lati BC, BD di eſſa baſe) ed allora il predetto ſolido EFG IHCB reſta diviſo in due porzioni, una delle quali è EFGIKB, e l'altra FGIHDK. Dico dunque, che coteſte porzioni ſono due priſmi triangolari fra loro eguali. Che ſieno priſmi triangolari ſi dimoſtra, perchè quanto alla porzione EFGIKB, s' oſſervi in primo luogo, che le comuni ſezioni del piano dividente, e de' piani triangolari, che comprendono la piramide ABCD, formano il quadrilatero FGIK, il quale è un parallelogrammo, per eſſere i lati FG, KI di lui tutti due la metà del lato CD, e però eguali, e per eſſer inoltre fra loro paralleli (art. 20): dal che ne ſegue, che anche gli altri due lati FK, GI di eſſo quadrilatero, i quali congiungono gli eſtremi de' primi, eſſendo fra loro paralleli, ed eguali (art. 59 el. p.) eſſo quadrilatero FGIK ſia un parallelogrammo. In ſecondo luogo anche i due quadrilateri EBKF, EBIG, ſono parallelogrammi, ſiccome è evidente, applicando debitamente ad eſſi pure il precedente diſcorſo. Finalmente i due piani triangolari oppoſti EFG, BKI ſono paralleli, ed eguali. Dunque la porzione EFGIKB compreſa da tutti i predetti parallelogrammi, e da' due triangoli oppoſti paralleli fra loro, ed eguali è un priſma triangolare. Quanto all' altra porzione FGIHCK del ſolido EFGIHCB, ſi moſtrerà eſſere anch' eſſa un priſma triangolare, ma che ha per baſe un parallelogrammo. Imperocchè cominciando in primo luogo da queſta ſteſſa baſe KCHI, l' uno e l' altro lato di lei KC, ed HI è metà del lato BC, e così pure KI, CH ſono entrambi metà del lato CD. Dunque la predetta baſe KCHI è un parallelogrammo. In ſecondo luogo il quadrilatero FGHC, in cui il lato FG è eguale al lato CH, e (per l' art. 20) parallelo ad eſſo lui, in cui ſono in oltre eguali, e paralleli gli altri due lati FC, GH, che ne congiungono gli eſtremi, è anch' egli un paral-

parallelogrammo. Finalmente i due triangoli FKC, GIH, fra loro opposti, e compresi da' lati eguali, e paralleli, sono eguali, e paralleli. Dunque essendosi già mostrato, che il quadrilatero FGIK è un parallelogrammo, è evidente, che anche la porzione FGIHCK è un prisma triangolare, il quale ha per base un parallelogrammo KCHI. Resta per tanto dimostrato, che il mentovato solido EFGIHCB può dividersi in due prismi triangolari.

Che poi cotesti prismi triangolari sieno anche fra loro eguali, si dimostrerà facilmente, se si osserverà, che il parallelogrammo KCHI, il quale è la base del secondo d' essi prismi è doppio del triangolo BKI base del primo, siccome lo fa conoscere il solo concepire nella figura la diagonale KH, la quale per essere eguale, e parallela al lato BI d' esso triangolo BKI, e per dividere il parallelogrammo KCHI in due triangoli eguali, pone la cosa fuori d' ogni dubbio. Ma oltre a ciò l' altezza dell' uno, e dell' altro prisma è la medesima. Dunque (art. *62*) essi prismi sono eguali.

85 Ogni piramide triangolare ABCD (*Fig. 66*) è la terza parte del prisma triangolare, che si può circoscrivere intorno a lei. Supponiamo, come nell' antecedente articolo 84, che la data piramide ABCD sia tagliata nel mezzo della sua altezza da un piano EFG parallelo alla base. Se nella parte tronca EBCDGF, che rimane verso la base, si formerà il prisma triangolare EBKIGF (appunto come abbiam fatto nel citato articolo 84), e se intorno alla piramide parziale AEFG, che rimane verso il vertice A, si circoscriverà il prisma AEFGQR, cotesti due prismi, i quali hanno tutt' i lati eguali, ed i piani opposti BKI, ARQ parimente eguali, saranno fra loro eguali; ma il prisma EBKIGF, che contiene tre ottavi dell' intiera piramide ABCD (art. 84) è triplo della piramide parziale AEFG, che ne contiene un solo ottavo (art. 82). Dunque anche il prisma AEFGQR, circoscritto intorno a questa, è triplo di lei. Ora dunque nella stessa maniera, se nella data piramide ABCD allungheremo i lati AB, AC, AD, fino in X, Y, Z, onde venga a raddoppiarsi la loro lunghezza; e se circoscriveremo di poi intorno all' intiera piramide ABCD un prisma triangolare (siccome abbiam fatto intorno alla

alla parte AEFG), dovrà trovarsi colla stessa dimostrazione, essere detto prisma circoscritto intorno alla medesima piramide ABCD, triplo di lei. Il che &c.

86 Un prisma triangolare qualunque ABCDEF (*Fig.* 67) si può dividere in tre piramidi triangolari fra loro eguali; posciachè la piramide ABCD iscritta in esso prisma, non contenendo, che la terza parte della solidità di lui (art. 85), e così pure la piramide DEAF volta al rovescio della prima, ed iscritta essa pure nel medesimo prisma, non contenendo, che un'altra terza parte della medesima solidità del prisma (art. 85) è forza, che la terza piramide ACDF la quale rimane, detratte da esso prisma le predette due, sia l'ultimo terzo della solidità di lui, e perciò sia anch'essa eguale alle altre due. Per rappresentarsi cotesta terza piramide, bisogna osservare i piani, che la comprendono, e sono i quattro triangoli ACD, CFA, FDC, DAF, il primo de' quali ACD, è comune alla prima, ed il quarto DAF è comune alla seconda piramide.

87 Perchè poi ogni prisma è sempre eguale ad un altro della stessa altezza, e della stessa base di lui (art. 63), perciò ogni piramide triangolare sarà la terza parte di qualsivoglia prisma, anche non circoscritto intorno a lei, purchè questo abbia la base, e l'altezza eguale a quella d'essa piramide mentre in tal caso avrà anche la base, e l'altezza eguale a quella d'un altro prisma, il quale si può concepire circoscritto intorno alla piramide, al quale egli è sempre eguale (art. 63).

88 Ciò che si è detto delle piramidi triangolari, può dimostrarsi egualmente delle altre di qualsivoglia specie elle sieno. Si può dunque dire in generale, che ogni piramide di qualsivoglia specie è la terza parte d'un prisma, il quale abbia la base, e l'altezza eguale a quella d'essa piramide, sia egli, o non sia circoscritto intorno a lei. Imperocchè siavi un rettilineo ABCDE (*Fig.* 68) di qualsivoglia numero di lati, e per maggior chiarezza supponiamo, che egli serva di base tanto ad una piramide poligona VABCDE, quanto ad un prisma ABCDE *eabcd*, e supponiamo avere cotesti due solidi la medesima altezza VP. Divisa la base ne' triangoli AEB, BEC, CED, e condotti de' piani, che passano per le linee dividenti EB,

EC,

EC, e per lo vertice della piramide (le sezioni di codesti piani, e della proposta piramide saranno i triangoli VBE, VCE) è chiaro, che cotesta piramide poligona verrà divisa in altrettante piramidi triangolari, quanti sono i triangoli in cui è divisa la base ABCDE. Similmente, se per le stesse linee EB, EC si condurranno degli altri piani, che incontrino il piano *abcde*, opposto alla base nelle linee *eb*, *ec*, che corrispondono a quelle, che dividono la base (le sezioni di cotesti nuovi piani col proposto prisma saranno i parallelogrammi *eb*BE, *ec*CE) è altresì chiaro, che esso prisma resterà diviso in altrettanti prismi triangolari quanti sono i triangoli della base ABCDE. Pertanto, avendo ogn' una delle dette piramidi triangolari la stessa base, e la stessa altezza del prisma triangolare, che le corrisponde, e però essendo ogn' una d' esse la terza parte di lui [articolo 87]; di più contenendo la piramide intiera tante delle dette piramidi triangolari quanti prismi triangolari sono contenuti nell' intiero prisma, ne segue, che quella debba appunto essere una terza parte di questo. Il che &c.

Della proporzione delle piramidi di qualunque specie.

89 DAlle cose fin' ora dette si raccoglie, che tutte le piramidi, ancorchè di specie fra loro dissimile, qualora sono di base, e di altezza eguale, sono altresì eguali. Imperocchè ogni piramide è la terza parte d' un prisma, che abbia la base, e l' altezza eguale a quella d' essa piramide (art. 88), e però, supponendosi fra loro eguali le basi, e l' altezze delle piramidi, lo saranno anche quelle de' prismi di cui elleno sono la terza parte, ma perchè cotesti prismi sono fra loro eguali (art. 63). Dunque saranno anche fra loro eguali le loro terze parti, cioè le piramidi stesse.

90 Le piramidi d' eguale altezza, ma di base disuguale, stanno fra loro, come le basi; giacchè deono stare come quei prismi, de' quali esse sono la terza parte. Ma i prismi d' altezza eguale, e di base disuguale, stanno fra loro, come le basi (art. 64). Dunque anche le piramidi.

91 Le piramidi di base eguale, ma d' altezza disuguale stanno

ſtanno fra loro, come le altezze, mentre anche in tal caſo ſtanno, come quei priſmi, de' quali eſſe ſono la terza parte. Ma sì fatti priſmi ſtanno, come le altezze (art. *65*). Dunque anche le piramidi.

92 Finalmente le piramidi d' altezza diſuguale, e di baſe altresì diſuguale ſtanno fra loro in ragione compoſta delle altezze, e delle baſi, perchè tale appunto è anche la ragione, che hanno fra loro quei priſmi de' quali elleno ſono la terza parte (art. *66*).

93 Dalchè naſce, che anche delle piramidi ſimili ſi verifichi quello, che abbiam detto, verificarſi de' priſmi ſimili, cioè d' eſſere fra loro in ragione triplicata, o vogliam dire, come i cubi de' loro lati omologi. Imperocchè la ragione di qualſivoglia piramide ad un' altra a lei ſimile, eſſendo compoſta da quella delle baſi, e da quella delle altezze (art. *92*), e la ragione delle baſi, eſſendo la ſteſſa, che la duplicata delle altezze (art. *69*) ſe di nuovo comporraſſi queſta colla ragione ſemplice delle medeſime altezze, è evidente, che formeraſſi la triplicata d' eſſe altezze, ovvero formeraſſi la triplicata di due lati omologi delle dette piramidi, mentre tanto è la ragione delle altezze quanto quella de' lati (art. *52*). Tagliando dunque una piramide qualunque con un piano parallelo alla baſe di lei la parte, che rimane fra il piano ſecante, ed il vertice, eſſendo anch' eſſa una piramide ſimile alla propoſta [art. 81] l' una ſarà all' altra, come il cubo di qualſivoglia lato di quella al cubo del lato omologo di queſta, cioè elleno ſtaranno fra loro in ragione triplicata de' loro lati omologi.

94 Oltre a ciò tutto quello, che ſi è detto alli articoli *67*, e *68* intorno a' priſmi reciproci, può facilmente adattarſi anche a quelle piramidi, che ſono la loro terza parte, e però le piramidi eguali avranno le baſi in ragione reciproca delle altezze, e quelle, che avranno le baſi in ragione reciproca delle altezze ſaranno eguali. Ciò non ha biſogno d' altra dimoſtrazione, mentre quella ragione, che hanno fra loro due grandezze qualunque, deono anche averla le loro egualmente moltiplici, o ſummoltiplici (art. 151 el. p.) tali eſſendo le piramidi riſpetto a' priſmi.

Della misura delle piramidi, e del modo d' esprimerle co' numeri.

95 VOlendosi esprimere per numeri una piramide di qualunque specie ella sia, basterà operare in una delle seguenti tre maniere: o prendere la terza parte di quel numero, che esprime la base, e moltiplicarla per quello, che esprime l' altezza: o prendere la terza parte del numero, che esprime l' altezza, e moltiplicarla per quello, che esprime la base: o finalmente prendere la terza parte del numero, che nasce dal moltiplicare quello, che esprime la base per quello, che esprime l' altezza: imperocchè operando in qualunque de' tre predetti modi, si avrà sempre un numero, che sarà la terza parte di quello, che esprime un prisma (art. 72) il quale sia della medesima base, e della medesima altezza della piramide, cioè d' un prisma, di cui ella è la terza parte.

96 Il numero poi, che esprime la superficie d' una piramide, non essendo altro, che la somma de' numeri piani, uno de' quali esprime la base, e gli altri le varie superficie triangolari, che comprendono la piramide [il che trattando noi de' prismi non abbiamo avvertito doversi intendere proporzionalmente anche di questi per essere cosa per se stessa abbastanza manifesta] è superfluo il mostrare, come esso numero si trovi, essendosene già abbastanza discorso all' articolo 173 degli elementi de' piani. Solo avvertiremo, che in qualsivoglia piramide i triangoli, che la comprendono sono per la maggior parte inclinati al piano della base, e però l' altezza di cui dobbiamo servirsi per misurare la loro area (art. 172 el. p.) non è già l' altezza della piramide medesima, ma è la distanza del vertice di questa (il quale è anche il vertice comune di tutti i triangoli) dalla base d' ogn' uno d' essi, e ciò debitamente inteso, dee avvertirsi anche de' parallelogrammi, che comprendono i prismi qualora questi sono obbliqui. Dalchè ne nasce, che quantunque la solidità d' una piramide sia sempre la terza parte d' un prisma circoscritto intorno a lei, e però la ragione di quella a questo sia sempre la medesima, cioè a dire di 1 a 3 (art. 88) nulladimeno la superficie di quel-

quella non ha sempre una medesima ragione alla superficie di questo, essendo ora la metà di essa, ora più, ora meno siccome può vedersi per lo seguente esempio, che è uno de' più semplici.

La piramide triangolare ABCD della figura 69, sia iscritta nel prisma ABCDFE, i lati del quale, AB, FD, EC siano obbliqui alla base BCD, ma però in maniera, che l'inclinazione (art. 27) del triangolo ACD al piano della base (il qual triangolo è uno di quelli, che comprendono la piramide) sia eguale all'inclinazione del lato AB, ovvero del parallelogrammo DE al piano della stessa base prolungato fuori del prisma verso H, onde per l'eguaglianza di tale inclinazione la perpendicolare condotta dal punto A sopra la base DC del triangolo ACD, sia eguale alla perpendicolare condotta da qualsivoglia punto del lato FE alla stessa retta DC, che è anche base del parallelogrammo DE. In tal caso dunque il triangolo ACD sarà la metà del parallelogrammo DE, anzi tutta la superficie della piramide ABCD sarà la metà di tutta la superficie del prisma ABCDFE circoscritto intorno a lei, mentre ciascuna delle superficie triangolari, che comprendono la piramide, si troverà essere la metà di quel parallelogrammo, che le corrisponde nel prisma, ed i piani opposti BCD, AEF, che insieme presi fanno parte di tutta la superficie del prisma, sono il doppio del solo piano BCD, il quale è una parte della superficie della piramide. Che se l'inclinazione del detto triangolo ACD sarà maggiore di quella del parallelogrammo DE, e che i due predetti solidi sieno tuttavia di spezie triangolare, come nella figura 70, la superficie della piramide eccederà la metà; se l'inclinazione di esso triangolo sarà minore, come nella figura 71, anche la superficie della piramide sarà minore della metà di quella del prisma circoscritto intorno a lei. Colla scorta di questo raziocinio può facilmente argomentarsi potervi essere la stessa variabilità di ragione anche tra le superficie delle piramidi poligone, e quelle de' prismi circoscritti intorno alle medesime.

De' ſolidi regolari.

97 SOlido, o *corpo regolare* diceſi quello, che ha tutt' i lati, e tutti gli angoli fra loro eguali. Ora per avere le predette due condizioni è neceſſario, che eſſi ſieno compreſi da ſole figure rettilinee, tutte fra loro eguali, e tutte regolari, cioè equilatere, ed equiangole. Altrimenti, ſe non foſſero equilatere, non ſarebbero ne pure equilateri i ſolidi da eſſe compreſi, e ſimilmente ſe non foſſero equiangole è facile intendere, come non lo ſarebbero ne pure i ſolidi compreſi dalle medeſime figure, onde non ſarebbero regolari. Si voglia, per eſempio, formare un corpo regolare, cioè, che abbia tutt' i lati, e tutti gli angoli fra loro eguali coll' adoprare de' rettilinei equilateri, ma non equiangoli, verbi grazia de' rombi fra loro eguali, e ſimili, quali ſono A, B, C [*Fig.* 72]. Supponiamo in primo luogo, che gli angoli del detto ſolido debbano formarſi con tre ſoli rombi concorrenti nel punto Z; due con angoli ottuſi, ed uno con acuto. E' chiaro, che coll' inclinare l' una verſo l' altra coteſte figure per compiere un angolo ſolido in Z, verranno a congiungerſi inſieme due altri angoli delle medeſime figure, cioè l' angolo x, del rombo A, e l' angolo y del rombo C: e nel punto di coteſto congiugnimento ſi dovrà formare con un terzo rombo un' altro angolo ſolido. Ma queſto per avere in ſe i due angoli acuti x, e y, non potrà mai eſſere eguale all' angolo Z, il quale ne contiene due ottuſi. Dunque il corpo compreſo da tali figure non equiangole non potrà mai eſſere regolare. Lo ſteſſo potrà dirſi ſe ſi ſupporrà, che uno degli angoli ſolidi ne comprenda due acuti, ed un ſolo ottuſo, mentre vi ſarà qualche altro angolo, che ne comprenderà un ſolo degli acuti. Che ſe il propoſto angolo ſolido ſi ſupporrà formato da più di tre rombi, o da più di tre rettilinei d' altra ſpecie, equilateri, ma non equiangoli, ſi potrà ſempre moſtrare, non potere tutti gli angoli ſolidi, formati dal congiugnimento di eſſi rettilinei, eſſere fra loro eguali.

98 Ciò premeſſo, dovendo inoltre ogni angolo ſolido eſſere neceſſariamente minore di quattro retti (art. 35) quei retti-

tili-

tilinei regolari, i quali hanno gli angoli del loro contorno tanto grandi, che tre di essi, o eccedano, od uguaglino la somma di quattro retti, non potranno essere atti a formare un corpo solido regolare. Ora ogni angolo del contorno d'un esagono regolare, contenendo 120 gradi (art. 71 el. p.) (e più contenendone ogni angolo del contorno di qualsivoglia poligono, che abbia più di sei lati), e però tre angoli d'un esagono uguagliando quattro retti, non potrassi coll'accoppiamento di più esagoni, ne d'altri poligoni di maggior numero di lati, formare verun solido regolare. I soli pentagoni dunque, i quadrati, ed i triangoli equilateri saranno le figure, di cui potremo servirci per una simile costruzione. Quanto a' pentagoni, gli angoli de' quali comprendono 108 gradi l'uno, questi potranno bensì unirsi a tre a tre per formare un angolo solido, ma non in maggior numero; altrimenti l'angolo riuscirebbe maggiore de' quattro retti. Lo stesso vale de' quadrati: ma i triangoli equilateri, che hanno i loro angoli di sessanta gradi l'uno, combinati a cinque a cinque, a quattro a quattro, od a tre a tre formeranno sempre degli angoli solidi di giusta misura (art. 36) non così se si combinassero a sei a sei, mentre in tal caso uguagliarebbero quattro retti. Per tanto cinque, e non più saranno le specie differenti de' corpi regolari. Tre di queste verranno costrutte da' triangoli equilateri, cioè, o con angoli solidi fatti da tre, o con angoli fatti da quattro, o con angoli fatti da cinque triangoli. Le altre due specie di solidi regolari, o saranno comprese da' quadrati, o saranno comprese da' pentagoni regolari uniti insieme in numero di tre soli per ciascun angolo.

99 Ciò stante quel solido regolare, che ha il minor numero possibile di facce, cioè di rettilinei, che lo comprendono (il qual numero è evidente non poter essere minore di quattro) si forma coll'accoppiamento di quattro triangoli equilateri, tutti fra loro eguali, e dicesi *tetraedro*. Egli è per tanto una piramide triangolare equilatera, quale viene in qualche modo rappresentata nella fig. 73 in A. Il secondo solido regolare B, ha sei facce, mentre egli è compreso da sei quadrati eguali. Questo chiamasi *cubo* e di lui abbiamo altrove

par-

parlato. Il terzo ſolido C, è compreſo da otto triangoli equilateri, ed eguali, e vien detto *ottaedro*. Il quarto D, è compreſo da dodici pentagoni regolari tutti fra loro eguali, e ſi chiama *dodecaedro*. Il quinto finalmente E, coſta di venti triangoli equilateri, ed eguali, onde per avere venti facce vien detto *icoſaedro*. Tutt' i mentovati ſolidi ſi chiamano con nome generico *poliedri regolari*, giacchè il nome di *poliedro* vuol dire in generale un ſolido di più facce, ancorchè di ſpecie fra loro differente.



COM-

Fig. 60.

Fig. 61.

Fig. 67.

Fig. 69.

Fig. 66.

Fig. 70.

Fig. 71.

Fig. 73.

COMPENDIO
DELLA
TRIGONOMETRIA
PIANA.

COM-

COMPENDIO DELLA TRIGONOMETRIA PIANA.

1 NEgli elementi della Geometria abbiamo moſtrato, come date le miſure di due lati d' un rettangolo ſi poſſa eſprimere in numeri la ſuperficie di eſſo, e parimente come, date le miſure della baſe, e dell' altezza d' un triangolo, o d' un parallelogrammo, ſi eſprima in numeri la loro ſuperficie, dacchè abbiamo poſcia dedotto il metodo di miſurare la ſuperficie di qualſivoglia altra figura rettilinea. Moſtreremo ora ſuccintamente, come ſi poſſano ritrovare in numeri le miſure di ciaſcun lato, e di ciaſcun angolo de' triangoli rettilinei, date che ſieno le miſure di alcuni altri lati, o angoli de' medeſimi; il che diceſi *ſciorre il triangolo*, e queſta parte della Geometria diceſi *Trigonometria piana*, o *rettilinea*; e da ciò non ſarà difficile dedurre le regole per trovar le miſure de' lati, e degli angoli di tutte le figure rettilinee, quando ſi abbia un numero ſufficiente di dati degli angoli, e de' lati di queſte, giacchè tutte le figure ſuddette ſi riducono in triangoli.

2 E' d' avvertire, che colle regole, le quali ſiamo per dare, ſpeſſe volte non ſi avrà la miſura degli angoli, o de' lati, che ſi cercano, con tutta l' eſattezza Geometrica, ma ſolamente in numeri aſſai proſſimi al vero, e con eſattezza, che baſti per non errare ſenſibilmente nella pratica; sì perchè potrà accadere, che l' angolo, o il lato, la cui miſura ſi cerca, debba eſprimerſi riſpetto all' unità, di cui ci ſerviamo, con qualche numero irrazionale, laddove i Trigonometri non adoperano, che numeri proprii, cioè razionali; sì anco perchè, quanto agli angoli può darſi caſo, che l' angolo, che ſi cerca, ſia tal parte della circonferenza, che non poſſa eſprimerſi con alcun numero ſeſſageſimale, cioè di gradi, minuti, ſecondi &c., che ſono que' ſoli numeri, che da noi ſi adoperano per gli angoli, ma

debba esprimersi con numero non sessagesimale, ancorchè razionale, come se egli dovesse essere la settima, o la quattordicesima parte della circonferenza &c. Per la medesima ragione ciascun'angolo, o lato dato, che debba servire per manifestare gli altri angoli, o lati del triangolo, ove fosse espresso in numeri irrazionali, o rispetto agli angoli in numeri non sessagesimali, dovrà sempre ridursi in numeri razionali, e rispetto agli angoli in sessagesimali, che sieno prossimi alla giusta misura di quel lato, o di quell'angolo; e in tali sorte di numeri sempre li supporremo ridotti, qualunque volta diremo esser dato un lato, o un angolo d'un triangolo. E finalmente in tutti i casi, ne' quali sarà dato più d'un lato del triangolo, dovranno questi lati ridursi, o esser ridotti in misura della medesima specie, cioè, che abbiano la medesima linea per unità, non potendosi altrimente procedere alla soluzione.

3 In ogni triangolo, tre essendo i lati, e tre gli angoli, è manifesto, che di queste sei parti tre almeno debbono esser date per poter sciorre il triangolo, cioè per trovar le tre altre, e che fra le date, una almeno dee essere un lato. Imperocchè se di queste sei parti due soltanto fossero date, come due angoli, o due lati, o un lato, e un angolo, facilmente si vede, che da questi dati non potrà necessariamente dedursi la misura delle altre parti incognite, potendo queste, salva la misura de' dati suddetti, essere o maggiori, o minori in infinite maniere. Così se io saprò, che la linea AB (*Fig.* 1) è di dieci piedi, e l'angolo ABF di 125 gradi, non da questo potrò mai dedurre quanto sia l'angolo A del triangolo, che abbia per uno de' lati AB, e per uno degli angoli il B, potendo esservi infiniti triangoli, che abbiano questi due dati; nè eziandio potrò dedurre quanta sia la lunghezza degli altri lati, o la misura del terzo angolo del detto triangolo; e il medesimo succederà in qualsivoglia altra combinazione, che si prenda di due soli dati. E parimente se io saprò la misura di ciascuno di tre angoli A, B, C (*Fig.* 2) del triangolo ABC, non potrò mai da questo dedurre di qual lunghezza ex. gr. di quanti piedi, o palmi &c. sieno i lati di esso; perocchè possono intendersi infiniti altri triangoli, come *abc* equiangoli ad ABC, i quali non abbiano però i lati di quelle lunghezze, ma maggiori, o minori. Per poter

ter

ter dunque sciorre un triangolo conviene aver date tre parti di esso, e che queste parti date non sieno i tre angoli, ma fra esse sia almeno un lato; che in tale maniera la misura delle altre parti incognite potrà ritrovarsi per le regole, che prescriveremo, e salvo in certi casi un' avvertenza, che a suo luogo si indicherà. Avvertendo tuttavia, che sebbene non si può propriamente sciorre un triangolo, in cui non si abbia altro di dato, fuorchè gli angoli di esso, cioè non si può da questi dati inferire la misura de' lati, si può nulladimeno sciorre impropriamente, cioè trovare la proporzione, che essi lati hanno fra loro, come a suo luogo mostreremo.

Definizioni trigonometriche.

4 C*Ompimento*, o *complemento* d' un arco, o d' un angolo è la differenza di esso arco, o angolo del quadrante, o sia dell' angolo retto, cioè de' gradi nonanta. Quindi è, che il complemento d' un arco minor del quadrante, o sia d' un angolo acuto è il difetto di esso da 90 gradi; ma il complemento d' un arco maggior del quadrante, o sia d' un angolo ottuso è l' eccesso di esso sopra 90 gradi. E due angoli aggiacenti ACB, ECB hanno sempre il medesimo complemento BCD (*Fig.* 3); e ogni complemento è sempre minore di gradi 90.

5 *Supplemento* d'un angolo è il difetto di esso da gradi 180, o sia da due retti. Quindi è, che due angoli aggiacenti ACB, ECB sono sempre supplementi l' uno dell' altro, come si è anche detto all' articolo 16 degli elementi della Geometria.

6 Se dal punto C di qualsivoglia angolo BCA (acuto nella prima figura, e ottuso nella seconda) come centro si descriverà un circolo BAH (*Fig.* 4), che tagli le linee BC, AC, le quali comprendono il detto angolo, ne' punti B, A, e congiungerassi la retta BA, e quindi dall' uno de' due punti A, B, come da A si tirerà sopra l' altra linea BC (prolungata, ove faccia bisogno) la perpendicolare AD; e parimente per uno de' suddetti punti A, B, come per B si tirerà la retta BE, che tocchi il circolo nel detto punto B, ed incontri l' altra retta CA prolungata, nel punto E; la retta AB dirassi *corda*, o *sot-*

tesa tanto dell'arco A B, quanto dell'angolo B C A; la retta AD *ſino retto*, o ſemplicemente *ſino* del detto arco, e del detto angolo; la retta D B *ſaetta*, o *ſino verſo*, la retta B E *tangente*, e la retta C E *ſecante* del medeſimo arco, ed angolo; e finalmente la retta C A, o C B, che è ſemidiametro del circolo deſcritto, chiameraſſi *raggio*, o *ſino totale*.

7 Da queſte definizioni ſeguono alcuni corollarj, che ſemplicemente eſporremo ſenza altra dimoſtrazione, perchè è aſſai facile il dedurle dalle definizioni ſteſſe. E prima è manifeſto, che prendendo ſempre un medeſimo raggio, cioè miſurando ſempre le corde, i ſini, le tangenti &c. in un medeſimo circolo, la corda ſarà maggiore quanto l'angolo, che la ſottende ſarà maggiore, ed all'incontro.

8 Che negli angoli acuti a maggior angolo corriſponde maggior ſino, e all'incontro a maggior ſino maggior angolo; e il ſino maſſimo di tutti è quello, che conviene all'angolo retto, che è lo ſteſſo raggio, il quale perciò appunto diceſi *ſino totale*; ma negli angoli ottuſi a maggior angolo corriſponde minor ſino; e che il ſino di qualſivoglia angolo è ſempre eguale al ſino del ſupplemento di eſſo.

9 Che il ſino verſo è ſempre maggiore quanto maggiore è l'angolo, o ſia queſto acuto, o ottuſo, e all'incontro &c.; e che il ſino verſo dell'angolo acuto è minore del raggio, quello dell'angolo retto eguale al raggio, e quello dell'ottuſo maggiore del raggio.

10 Che negli angoli acuti a maggior angolo riſponde maggior tangente, e all'incontro. Che la tangente dell'angolo retto è infinita; che negli angoli ottuſi a maggior angolo riſponde minor tangente, e all'incontro; e che la tangente di qualſiſia angolo è ſempre eguale alla tangente del ſupplemento di quello.

11 Che la ſecante è ſempre maggiore del raggio, e negli angoli acuti maggior angolo, e maggior ſecante ſi corriſpondono. Che la ſecante dell'angolo retto è infinita; e che negli angoli ottuſi maggior angolo riſponde a minor ſecante; e che finalmente la ſecante d'ogni angolo è eguale alla ſecante del ſuo ſupplemento.

12 La corda, il ſino, la ſaetta, la tangente, e la ſecante,

te, che conviene al complemento d'un arco, o d'un angolo, diceſi *corda ſeconda*, *ſino ſecondo*, *ſaetta ſeconda*, *tangente ſeconda*, e *ſecante ſeconda* di quell'arco, o angolo, al cui complemento conviene. Come ſe ſarà l'angolo FCE, il cui complemento ſia ECD, la corda ED di queſto complemento ſi dirà corda ſeconda dell'angolo FCE [*Fig.*5]; e così il ſino EH, la aetta DH, la tangente DK, e la ſecante CK del detto complemento ECD ſi diranno ſino ſecondo, ſaetta ſeconda, tangente ſeconda, e ſecante ſeconda del medeſimo angolo FCE. Sogliono alcuni moderni in vece di ſino ſecondo dire *coſino*, e per tangente ſeconda *cotangente*, e per ſecante ſeconda *coſecante*.

13 Da ciò ſegue, che due angoli aggiacenti FCE, BCE hanno la medeſima corda ſeconda, il medeſimo ſino ſecondo, la medeſima ſaetta, e tangente, e ſecante ſeconda; giacchè (art. 4) hanno il medeſimo complemento DCE.

14 Ne ſegue ancora, che il complemento DCE di qualſivoglia angolo acuto FCE avrà per ſuo ſino ſecondo il ſino di queſt'angolo FCE, e per ſua tangente ſeconda la tangente di queſto, e così dell'altre linee trigonometriche di ſopra definite.

15 E finalmente, che in qualſivoglia angolo acuto FCE, ovvero ottuſo BCE la porzione del ſemidiametro CA, compreſa fra il punto dell'angolo, o ſia il centro del circolo C, e il ſino di eſſo angolo EA è ſempre eguale al ſino ſecondo HE del detto angolo FCE, ovvero BCE.

Del canone trigonometrico.

16 SE dal punto A di qualſiſia angolo BAC, come centro, ſi deſcriveranno più circoli, i cui ſemidiametri ſieno A*b*, AB (*Fig.6*), e che ſeghino l'altra linea AC, che comprende il detto angolo, ne' punti *c*, C, e ſi congiungeranno BC, *bc*, che ſaranno, ciaſcune nel ſuo circolo, corde del ſuddetto angolo, è manifeſto, che i triangoli *c*A*b*, CAB ſaranno ſimili per avere l'angolo A comune, e i lati, che lo comprendono *c*A, *b*A nell'iſteſſa proporzione, che i lati CA, BA, cioè in ragione d'egualità; e perciò, come il raggio A*b* alla corda *bc*, così il raggio AB alla corda BC. Dunque quella

ra-

ragione, che ha in un circolo il raggio alla corda di qualsivoglia angolo, quella medesima ha il raggio in qualsivoglia altro circolo alla corda del medesimo angolo. Parimente se si tireranno i seni *cd*, CD, si mostreranno simili i triangoli A*cd*, ACD, come quelli, che oltre l' angolo comune A, hanno anco gli angoli retti *d*, D; e perciò come il raggio AC al sino CD, così il raggio A*c* in qualsivoglia altro circolo al sino *cd* del medesimo angolo. Così pure si mostrerà, come il raggio A*b* alla tangente *be*, o alla secante A*e*, così in ogni altro circolo il raggio AB alla tangente BE, o alla secante AE del medesimo angolo. Finalmente essendo anco simili i triangoli *cdb*, CDB, ed essendosi mostrato poc' anzi essere A*b* : *bc* : : AB : BC, ed essendo parimente *bc* : *bd* : : BC : BD, sarà anco per egualità di ragione A*b* : *bd* : : AB : BD. Dunque come il raggio alla saetta in un circolo, così il raggio alla saetta del medesimo angolo in qualsivoglia altro circolo. Generalmente dunque in ogni circolo il raggio ha la medesima proporzione a ciascuna delle linee trigonometriche, che appartengono ad un medesimo angolo, o sia ad un medesimo arco.

17 Quindi è, che se il raggio di qualsivoglia circolo si esprimerà sempre per un medesimo numero, quel numero, che esprimerà la corda, il sino, la tangente, la secante &c. di qualsisia angolo in un circolo, esprimerà ciascuna di queste stesse linee convenienti al medesimo angolo in qualsivoglia altro circolo. Onde i numeri di tutti i sini, di tutte le tangenti &c., che possono convenire a qualsivoglia angolo, trovati, che sieno una volta in un circolo, serviranno per tutti gli altri circoli, purchè in tutti si intenda il raggio di un egual numero di parti.

18 Sono pertanto convenuti fra loro i moderni autori di Trigonometria d' intendere il raggio di ciascun circolo diviso in 10000000 parti eguali, o talvolta ancora in altro numero maggiore, o minore, ma sempre decadico per maggiore comodità, avvegnachè gli antichi fossero soliti valersi del numero 60, o d' altri numeri sessagesimali. Quindi con particolari artificj, e non senza incredibil fatica hanno preso a calcolare i numeri de' sini, delle tangenti, e delle altre linee trigono-

me-

metriche di ciascun angolo acuto a grado per grado, anzi a minuto per minuto, e questi numeri hanno disposti per ordine in alcune tavole, che costituiscono quello, che si chiama *canone trigonometrico*, acciocchè col mezzo di questo canone, dato qualsivoglia arco, o angolo di gradi, e minuti senza frazioni, si possa subito trovare il numero del sino, della tangente &c., che gli corrisponde; e dato all' incontro qualsivoglia numero per sino, per tangente &c. d' un angolo, il qual numero sia fra quelli, che sono registrati nel detto canone, si possa ritrovare di quanti gradi, e minuti sia il detto angolo, come è necessario di fare nelle soluzioni trigonometriche, secondo le regole, che appresso esporremo. Anzi hanno inoltre dimostrato, come si possano eziandio col soccorso del medesimo canone trovare i numeri de' sini &c. degli angoli, che oltre i gradi, e minuti contengono delle seconde, e all' incontro come, dato un numero per sino, per tangente &c., ancorchè non sia fra quelli, che sono registrati nel canone, si possa trovare a qual angolo di gradi, minuti, e seconde egli corrisponda; purchè sempre s' intenda il raggio di 10000000, o di qual altro siasi numero decadico, da ciascuno di essi supposto, nella construzione del suo canone; e purchè si convenga in vece de' numeri esatti, e precisi di questi sini, tangenti &c., come pure degli angoli (i quali numeri spesse volte sono irrazionali, e inesprimibili, come di sopra si è detto) di contentarsi di numeri razionali prossimi al vero.

19 Quali sieno stati gli artificj suddetti, col mezzo de' quali hanno potuto rinvenire i numeri di ciascuna delle accennate linee, non è nostro intendimento di spiegarlo in questo luogo, per non allungar di soverchio il presente compendio. Così ancora per servire alla brevità non daremo in iscritto i precetti, che riguardano l' uso del canone, ma piuttosto gli spiegheremo in pratica col canone stesso alla mano, il che farà assai meglio intendere la forma, e l' uso, che qualsivoglia precetto far non potrebbe. Passeremo dunque a mostrare in alcuni pochi teoremi i fondamenti delle regole, che appartengono alle soluzioni de' triangoli rettilinei, in grazia delle quali è stato costrutto il canone trigonometrico, e appresso esporremo le regole stesse in alcuni problemi, che conterranno tutt' i casi possibili delle dette soluzioni. Teo-

Teoremi fondamentali della Trigonometria.

20 IN ogni triangolo ABC, ſe da uno degli angoli acuti A, come centro ſi deſcriverà per l' angolo retto B [*Fig.*7] un circolo, il cui raggio ſarà per conſeguente il perpendicolo AB aggiacente all' angolo A, l' altro perpendicolo BC diverrà tangente, e l' ippotenuſa AC ſecante del detto angolo A. Che ſe dal medeſimo centro A ſi deſcriverà un circolo, che paſſi per l' altro angolo acuto C, e così abbia per raggio l' ippotenuſa AC, allora il perpendicolo CB oppoſto all' angolo A diverrà ſino di eſſo angolo A, e l' altro perpendicolo AB ſarà eguale al ſino ſecondo del detto angolo A. Tutto queſto è evidente per gli articoli 6, e 15.

21 In ogni triangolo rettilineo i lati hanno la medeſima proporzione fra loro, che hanno i ſini degli angoli oppoſti. Sia il triangolo rettilineo DBC (*Fig.* 8). Deſcrivaſi intorno ad eſſo un circolo, il centro ſia A, e da queſto punto tiriſi ſopra qualſivoglia de' lati del triangolo DBC la perpendicolare AF, che prolunghiſi fino alla periferia in H, e ſi congiungano BA, CA. Preſa dunque AB, ovvero AC, per raggio, è manifeſto, che BF (che è la metà di BC) ſarà il ſino dell' angolo BAH, il qual angolo eſſendo metà dell' angolo BAC, ed eſſendo parimente l' angolo BDC alla periferia metà del detto angolo BAC al centro, la linea BF potrà dirſi ſino anche dell' angolo BDC in un circolo, che abbia per raggio AB. Nell' iſteſſo modo ſi moſtrerà, che BK, metà di BD, diviene ſino dell' angolo BCD nel medeſimo circolo; e che CG, metà di CD, diviene ſino dell' angolo CBD, ſempre nel medeſimo circolo, che ha per raggio AB. Dunque ciaſcun lato del triangolo CBD viene ad eſſer doppio del ſino dell' angolo a lui oppoſto, prendendo ſempre i ſini in uno ſteſſo circolo; e perciò i lati ſono tra loro, come i ſini degli angoli oppoſti. Il che &c.

22 In ogni triangolo ſcaleno, come il lato maſſimo alla ſomma degli altri due, così la differenza di queſti, alla differenza della baſe. Sia il triangolo ſcaleno FGH, il cui lato maſſimo FH (*Fig.* 9). Preſo per centro il punto G dell' angolo

golo

golo FGH oppoſto a queſto lato, e per ſemidiametro il lato GF il minore degli altri due, deſcrivaſi il circolo LFIK, che tagli FH in I, e GH in K. Si prolunghi HG fino alla periferia in L; la porzione IH del lato maſſimo FH, che reſta fuori del circolo, chiamaſi *differenza della baſe*. Dico dunque, che come FH lato maſſimo, alla ſomma degli altri due GH, GF, cioè ad HL; così la differenza di queſti due, cioè KH, alla differenza della baſe IH. Il che è evidente per le coſe dimoſtrate all' articolo (205) degli elementi della Geometria.

23 In ogni triangolo rettilineo come la ſomma di due lati alla loro differenza, così la tangente della ſemiſomma degli angoli oppoſti ad eſſi, alla tangente della ſemidifferenza de' medeſimi (*Fig.* 10). Sia il triangolo rettilineo DBC. Da uno degli angoli di eſſo, B, come centro, deſcrivaſi un circolo, il cui ſemidiametro ſia BD, cioè il minore dei due lati, che comprendono il detto angolo B, il qual circolo tagli DC, BC ne' punti E, F. Si prolunghi CB fino alla periferia in A, e congiungaſi AD, la quale ſia diviſa per mezzo in S dalla perpendicolare FS; e per B tirando BK parallela a CD, ſi prenda SO eguale ad SK, (onde ſeguirà, che anco OD ſia eguale ad AK), e ſi congiunga OB. Quì è manifeſto, che i due triangoli AKB, ADC ſono ſimili. Perciò come AD ad AC, così AK ad AB; e alternando AD:AK::AC:AB; e perciò come AD ad AK preſa due volte (cioè ad AK con OD), così AC ad AB due volte, cioè ad AF. Dunque dividendo, come AD a KO, così AC ad FC. Ma come AD a KO, così la metà di AD, cioè AS, alla metà di KO, cioè ad SK; dunque come AC a FC, così AS ad SK. Ciò ſuppoſto ſi conſideri, che di queſte quattro linee, che ſi ſono moſtrate proporzionali, AC:FC::AS:SK, la prima AC non è altro, che la ſomma de' lati DB, BC, che comprendono l'angolo B del triangolo DBC; la ſeconda FC, non è altro, che la differenza de' medeſimi lati; la terza AS, non è altro, che la tangente dell' angolo ABS in un circolo, che abbia per raggio BS; il qual angolo ABS è la metà dell'angolo eſterno ABD, cioè della ſomma de' due interni BDC, BCD oppoſti a' detti lati BC, BD, onde AS viene a eſſere la tangente

della ſemiſomma de' due angoli ſuddetti; e finalmente la quarta SK, non è altro, che la tangente dell' angolo KBS in un circolo, che abbia parimente per raggio AS; il qual angolo KBS è la metà di KBO, cioè, è la metà della differenza dell' angolo OBD, o ſia ABK, ovvero BCD, dall' angolo KBD, ovvero BDC, e perciò SK viene a eſſere la tangente della ſemidifferenza de' detti due angoli BCD, BDC. Dunque come la ſomma de' lati DB, BC, alla loro differenza, così la tangente della ſemiſomma degli angoli BCD, BDC oppoſti a' detti lati, alla tangente della loro ſemidifferenza. Il che &c.

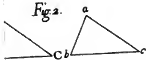
24 Da queſti pochi teoremi dipendono tutte le regole di ſciorre, mediante il canone trigonometrico, qualſivoglia triangolo rettilineo in tutti i caſi poſſibili, le quali eſporremo nei ſeguenti Problemi, nella pratica de' quali tutte le operazioni aritmetiche, che occorre di fare, conſiſtono d' ordinario nel trovare un quarto numero proporzionale a tre numeri dati, il che ſi fa, come è noto, per la regola detta aurea; cioè con moltiplicare il ſecondo de' numeri dati per lo terzo, e divider poſcia il prodotto per lo primo, e il quoziente, che ne riſulta è il quarto proporzionale, che ſi cerca.

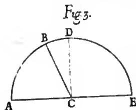
Problemi di trigonometria piana, che comprendono la ſoluzione de' triangoli rettilinei in tutti i caſi poſſibili.

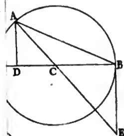
25 NE' triangoli rettangoli (ne' quali eſſendo già dato l' angolo retto baſtano per la ſoluzione due altri dati), dati i due perpendicoli AB, BC, trovare l' ipotenuſa AC (*Fig.* 11). Queſto primo problema ſi ſcioglie ſenza uopo del canone, facendo i quadrati di AB, e di BC, e dalla ſomma di queſti eſtraendo la radice quadrata, che ſarà la linea AC, che ſi cerca, come è manifeſto per l' articolo 69 degli elementi della Geometria.

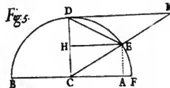
Eſempio. Sia AB piedi 3, BC piedi 4. Si cerca l' ippotenuſa AC. Il quadrato di AB è 9; quello di BC 16. La ſomma di amendue è 25. La radice quadrata di queſta ſomma è 5, e tanta ſarà l' ipotenuſa AC.

Se la ſomma de' quadrati de' perpendicoli non foſſe numero quadrato, cioè non aveſſe radice quadrata, dovrebbe pren-

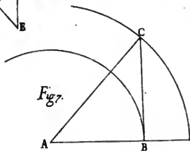

Fig.2.
a
C
b
c

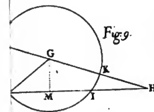

Fig.3.
B
D
A
C
E

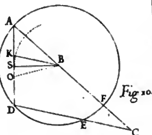

A
D
C
B
E


Fig.5.
D
K
H
E
B
C
A
F


C
E
D
B


C
Fig.7.
A
B


Fig.9.
G
K
M
I
H


A
K
S
B
O
Fig.10.
D
F
E
C

prenderſi tal radice per approſſimazione, e il medeſimo s' intenda in tutti i caſi ſimili.

26 Ne' triangoli rettangoli data l' ipotenuſa A C, con uno de' perpendicoli A B, trovar l' altro B C. Queſto ancora ſi ſcioglie ſenza il canone, facendo il quadrato dell' ipotenuſa A C, e quello del perpendicolo dato A B, e ſottratto queſto quadrato dal primo, reſterà un numero, la cui radice quadrata ſarà il perpendicolo cercato B C, il che è evidente come ſopra.

Eſempio. Sia A C piedi 5, A B piedi 3. Si cerca B C. Il quadrato di A C ſarà 25, il quadrato di A B ſarà 9; ſottraendo queſto da quello reſta 16, del qual numero la radice quadrata è 4, e tanto ſarà il perpendicolo cercato B C.

27 Ne' triangoli rettangoli dati i due perpendicoli A B, B C, trovare gli angoli. Facciaſi come il numero, in cui è dato uno de' perpendicoli A B (*Fig.* 12), al numero in cui è dato l' altro B C, così il numero 10000000, o altro numero, che eſprima il raggio (che per tale può intenderſi A B) ad un quarto numero, e queſto (per l' articolo 20) eſprimerà B C, come tangente dell' angolo A adjacente ad A B; onde cercando a qual angolo convenga queſto quarto numero fra le tangenti del canone trigonometrico, ſi avrà l' angolo A; e ſottraendo queſto da gradi 90, ſi avrà l' altro angolo C.

Eſempio. Sia A B piedi 27, B C piedi 59. Si cercano gli angoli A, C. E prima per l' angolo A la proporzione dovrà ordinarſi come ſegue A B (27) : B C (59) : : raggio (10000000) : tangente dell'angolo A aggiacente ad A B, moltiplicando il ſecondo termine 59 per lo terzo 10000000, e dividendo il prodotto per lo primo 27, ne viene per quarto numero $21851851\frac{23}{27}$; e queſta ſarà la tangente dell' angolo A; il qual numero (traſcurando la frazione) cercato nel canone trigonometrico fra le tangenti, ſi trova eſſer tangente dell' angolo di gr. 65. 24'. 35", e tanto ſarà l' angolo A. Sottratto poſcia queſto da gr. 90, reſterà l' angolo C di gradi 24. 35'. 25".

28 Ne' triangoli rettangoli data l' ipotenuſa F G con uno de' perpendicoli G H, trovar gli angoli (*Fig.* 13). Facciaſi come il numero, in cui è data l' ipotenuſa F G, al numero, in cui è dato il perpendicolo G H, così il numero 100000,

V 2 che

che esprime il raggio (che per tale può intendersi FG) ad un quarto numero, e questo (per l'articolo 20) esprimerà GH, come sino dell'angolo F opposto a esso GH; e perciò trovato nel canone questo numero fra i sini, si avrà l'angolo F, che sottratto poscia da gradi 90 manifesterà eziandio l'angolo G.

Esempio. Sia l'ipotenusa FG miglia 60, il perpendicolo GH miglia 53. Si cercano gli angoli F, G, e prima l'angolo F opposto a GH. Si ordini dunque la proporzione così FG (60) : GH (53) :: raggio (100000) : sino dell'angolo F opposto a GH, moltiplicando 53 per 100000, e dividendo per 60 ne proviene 88333 (trascurando una frazione), e questo sarà il sino dell'angolo F, e cercando questo numero fra i sini del canone, si troverà l'angolo F di gradi 62. 2'. 46", e tolto poscia quest'angolo da gradi 90, resterà l'angolo G gr. 27. 57'. 14".

29 Ne' triangoli rettangoli dato un perpendicolo FH, e dato un angolo (per cui è dato anco l'altro) trovare l'altro perpendicolo HG (*Fig.* 14). Facciasi come il numero del raggio 100000 al numero della tangente dell'angolo F aggiacente al dato perpendicolo FH, così il perpendicolo FH nella misura, nella quale è dato, al quarto numero, che sarà quello del perpendicolo HG nella stessa misura (art. 20).

Esempio. Sia il perpendicolo FH pertiche 187; sia l'angolo F (o dato, o dedotto dalla misura dell'angolo G), che è l'aggiacente ad FH, di gradi 48. 14'; la cui tangente nel canone è 111975, e per tale si considererà il perpendicolo cercato GH, considerandosi dato FH, come raggio di parti 100000. Perciò facciasi questa proporzione. Raggio (100000) : tangente dell'angolo F (111975) :: perpendicolo FH (187) : perpendicolo cercato GH, moltiplicando, e dividendo secondo il solito, ne viene il quarto numero $209\frac{39325}{100000}$; e tanto è il perpendicolo GH in pertiche.

30 Ne' triangoli rettangoli dato un perpendicolo FH, ed un angolo (per cui è dato anche l'altro) trovar l'ipotenusa FG. Facciasi come il raggio alla secante dell'angolo F aggiacente al dato perpendicolo, così FH nelle misure, nelle quali è no-

è nota, al quarto numero, che farà l' ipotenufa FG nelle medefime mifure (art. 20).

Efempio. Sia il perpendicolo FH, come prima pertiche 187, e l' angolo F gradi 48. 14'. La fecante di queft' angolo (per cui fi confidererà l' ipotenufa FG) fi trova nel canone 150128, pofto il raggio 100000, di cui fa l' uficio il perpendicolo FH. Si cerca l' ipotenufa FG. Raggio (100000) : fecante dell' angolo F (150128) : : perpendicolo FH (187) : ipotenufa cercata FG. Fatta l' operazione fi troverà l' ipotenufa FG di pertiche 280 $\frac{73936}{100000}$.

31 Ne' triangoli rettangoli data l' ipotenufa AB, ed un angolo (per cui è dato anche l' altro) trovare qualfivoglia de' due perpendicoli, come BC (*Fig.* 15). Facciafi come il raggio al fino dell' angolo A oppofto al perpendicolo cercato BC, così l' ipotenufa AB nelle mifure date, al quarto, che farà il perpendicolo BC nelle fteffe mifure (art. 20).

Efempio. Sia l' ipotenufa AB palmi 49; l' angolo ABC gradi 28. 16'. 15", e cerchifi il perpendicolo BC. L' angolo A oppofto a quefto perpendicolo farà gradi 61. 43'. 45', il cui fino trovafi nelle tavole trigonometriche 88072. Pertanto l' analogia farà quefta. Raggio (100000) : fino dell' angolo A (88072) : : ipotenufa AB (49) : perpendicolo cercato BC. Il perpendicolo cercato BC fi troverà, fatta la folita operazione di palmi 43 $\frac{15528}{100000}$.

32 In tutt' i triangoli rettilinei dati due angoli D, F (dacchè è noto anco il terzo G) col lato FG (*Fig.* 16) oppofto all' uno di quelli D, trovare qualfifia degli altri lati. Se fi cerca il lato DG oppofto all' altro angolo dato F, facciafi come il fino dell' angolo D oppofto al lato noto FG, al fino dell' angolo F oppofto al lato cercato DG, così FG al quarto, che farà DG nelle fteffe mifure, nelle quali è noto FG (art. 121). Se poi fi cerca il lato DF oppofto al terzo angolo G, trovifi prima l' angolo G col fottrare la fomma de' due noti D, F da gradi 180, e con ciò il lato DF verrà anch' egli ad effer oppofto ad un angolo, che farà dato; onde fi potrà determinare colla medefima regola, che fi è data per trovare DG.

Efem-

Esempio. Sia l'angolo D gradi 88. 50', l'angolo F gradi 63. 9'. 22'. Il sino dell'angolo D sarà 99979, quello di F sarà 89224. Sia il lato FG once 131, e si cerchi il lato DG opposto all'angolo F. L'analogia si farà con quest'ordine. Sino dell'angolo D (99979) : sino dell'angolo F (89224) :: FG (131) : DG, che si cerca. Moltiplicando al solito il secondo, e il terzo numero, e dividendo per lo primo, avrassi il lato, che si cerca, DG di once $116\frac{90780}{99979}$.

Se poi si cercasse il lato FD opposto al terzo angolo G, essendo che la somma de' due D, F è di gradi 151. 59'. 22", che tolta da gradi 180 lascia l'angolo G di gradi 28. 0'. 38", il cui sino è 46963, è manifesto, come si debba procedere nel calcolo per ritrovare questo lato, cioè: Sino dell'angolo D (99979) : sino dell'angolo G (46963) :: FG : (131) : FD e ne risulterà il lato FD di once $61\frac{53414}{99979}$.

33 In tutt'i triangoli rettilinei, dati due angoli D, F (dal che è dato anco il terzo G) col lato FD aggiacente a quello, trovare gli altri lati. Questo problema non è punto differente da quello dell'antecedente articolo; imperocchè essendo noto per mezzo de' due angoli D, F, anco il terzo G, il lato noto FD, che è aggiacente a' due D, F, viene ad essere l'opposto ad uno de' dati G; onde si hanno in questo caso i medesimi dati del precedente problema, é si cercano, come in esso, i lati opposti ad angoli dati, e perciò si dee procedere in tutto, e per tutto colla regola ivi prescritta; ne ciò ha bisogno d'essere illustrato con esempio alcuno.

34 In tutt'i triangoli rettilenei, dati due lati AB, BC, e l'angolo A opposto ad uno di essi BC (*Fig.* 17), trovare gli altri angoli, purchè sia nota la loro specie, e trovare il terzo lato CA. Facciasi come il lato BC opposto al dato angolo A, al lato BA opposto all'angolo ACB, che si cerca, così il sino dell'angolo dato A, al quarto, che sarà il sino dell'angolo cercato ACB (art. 21) questo sino dunque nel canone trigonometrico mostrerà l'angolo ACB, quando si sappia dover questo essere acuto; ma se dovesse esser ottuso (come se ritenendo tutt'i dati, la linea BC fosse nella positura Bf, e l'an-

l'angolo cercato dovesse essere B*f*A) si dovrà sottrare l'angolo, a cui conviene il sino, poc'anzi trovato, da' gradi 180, per avere l'angolo, che si cerca, come è evidente per le cose dette all'articolo 52 della Geometria, e all'articolo 8 del presente trattato. Manifesto per tal modo, oltre l'angolo A, che già era dato, un altro angolo del triangolo, come ACB, (dal che viene ad esser dato anche il terzo CBA) si avranno nel triangolo CBA tutti gli angoli, ed in oltre si avrà uno, anzi due lati AB, BC; onde il terzo lato CA si potrà ritrovare per l'articolo 32.

Esempio. Sia il lato AB di parti 95, e il lato BC di 29 delle medesime parti; e finalmente sia l'angolo A di gradi 17 25'. Si cerca l'angolo ACB, che si suppone dover esser acuto. Il sino di gr. 17. 25' si trova nel canone 29932. Dunque lato BC (29): lato BA (95):: sino dell'angolo A (29932): sino dell'angolo cercato ACB ne verrà il sino dell'angolo ACB 98053, trascurando le frazioni, al qual sino corrispondono nel canone gr. 78. 40'. 30", e tanto sarà l'angolo ACB, giacchè si suppone dover questo essere acuto. Che se egli dovesse essere ottuso, come se si trattasse del triangolo A*f*B (nel quale B*f* è eguale a BC), e si cercasse in esso l'angolo A*f*B, co' medesimi dati di prima, dovrebbe l'angolo suddetto di gr. 78. 40'. 30" sottrarsi da gr. 180, e il residuo gr. 101. 19'. 30" sarebbe l'angolo cercato. Trovato poscia l'angolo ACB, e per esso l'angolo ABC, se si vorrà il lato AC, si procederà secondo l'articolo 32, il che non ha bisogno d'altro esempio.

35 In tutt' i triangoli rettilinei, dati due lati GF, GH coll'angolo G compreso da essi, trovare gli altri angoli, e la base FH (*Fig.* 18). Si faccia la somma de' lati FG, GH, e se ne raccolga parimente la differenza con sottrare il minore di essi FG dal maggiore GH (se pure non fossero eguali, nel qual caso non vi sarebbe bisogno d'operazione trigonometrica per trovare gli angoli F, H, mentre il triangolo sarebbe isoscele, e sottratto l'angolo G da' due retti, la metà del residuo sarebbe l'angolo F, ovvero H) si sottragga poscia l'angolo dato G da' due retti, e il rimanente sarà la somma de' due F, H, la qual somma divisa per metà darà la semisom-

somma di essi, e di questa semisomma trovisi nel canone la tangente. Quindi facciasi come la somma de' due lati FG, GH poc'anzi trovata, alla loro differenza parimente trovata, così la tangente della semisomma degli angoli F, H, al quarto numero, il quale (art. 32) sarà la tangente della semidifferenza di questi angoli. Questo numero dunque cercato nel canone fra le tangenti, mostrerà quanta sia la detta semidifferenza, la quale si dovrà sottrare dalla semisomma de' medesimi angoli per avere l'angolo H opposto al lato minore FG, e si dovrà aggiugnere alla semisomma per aver l'angolo F opposto al lato maggiore HG. Trovati per tal modo gli angoli F, H (oltre G, che già è dato) si avranno nel triangolo GFH i tre angoli con uno, anzi due lati, onde per l'articolo 32 si potrà trovare il terzo lato, o sia la base FH.

Esempio. Sia FG miglia 16, GH miglia 34, e l'angolo G gradi 98. 43'. La somma de' lati FG, GH sarà 50 : la differenza di essi 18 : l'angolo G sottratto da' due retti, o sia da gr. 180, lascia gr. 81. 17', che è la somma de' due F, H, la cui metà, che è gr. 40. 38'. 30" sarà la semisomma de' medesimi, e di questa semisomma la tangente è 85836. Si ordinerà dunque la proporzione così; Somma di FG, GH (50) : differenza di FG, GH (18) : : tangente della semisomma degli angoli F, H [85836] : tangente della semidifferenza degli angoli F, H, moltiplicando, e dividendo secondo la regola aurea, ne proviene la tangente della semidifferenza degli angoli F, H, 30901; alla qual tangente corrispondono nel canone gradi 17. 10'. 18", e tanta è la semidifferenza degli angoli F, H. Aggiungendo dunque questa semidifferenza 17. 10. 18' alla semisomma de' medesimi, trovata poc'anzi di gr. 40. 38'. 30", ne proviene l'angolo F opposto al lato maggiore GH, di gradi 57. 48'. 48"; sottraendo la detta semidifferenza dalla detta semisomma, ne risulta l'angolo H, opposto al lato minore GF, di gr. 23. 28'. 12". Trovati in tal modo gli angoli, perciò che appartiene al trovar la base FH veggasi l'esempio dell'art. 32.

36 In tutt'i triangoli rettilinei dati i tre lati trovare gli angoli. Se il triangolo sarà equilatero ciascun angolo sarà di gr. 60. Se isoscele, come *opq* (*Fig.*19), tirando una perpendicolare *pr* sopra la base dall'angolo *p* opposto ad essa, si ri-

si risolverà in due triangoli rettangoli, in ciascuno de' quali è noto il lato *or*, ovvero *rq*, metà della base, e l'ipotenusa *op*, ovvero *pq*, oltre l'angolo retto in *r*; e perciò gli angoli *o*, e *q* si troveranno in ciascuno di questi due triangoli (per l'articolo 28). Da che si avrà poi anche il terzo angolo *opq*. Sia dunque finalmente il triangolo scaleno, come ACB (*Fig.*20), il cui lato massimo sia AB. Facciasi la somma degli altri due lati AC, BC, come pure la loro differenza; e intendasi dal centro C, che è l'angolo opposto al lato massimo, descritto il circolo AD col semidiametro AC del lato minimo, il qual circolo tagli AB in D; e dal punto C tirando la perpendicolare CE sopra AB, la quale dividerà per mezzo AD in E, la porzione DB sarà la differenza della base (art. 22). Facciasi ora come il lato massimo AB alla somma de' due AC, CB, così la differenza di questi, ad un quarto numero, che sarà la differenza della base DB (art. 22). Sottratto poscia DB da AB, prendasi la metà del residuo AD, la qual metà, come è manifesto, sarà AE. Nel triangolo dunque AEC, rettangolo in E, essendo ora data l'ipotenusa AC col perpendicolo AE, si trovi (art. 28) l'angolo A, con che si troverà anco l'angolo ACE. Parimente sottratta AE da AB si avrà EB, colla quale, e coll'ipotenusa CB nel triangolo rettangolo CBE, troverassi l'angolo B (art. 28), e nello stesso tempo si avrà ECB, e in fine tornando al triangolo ACB, la somma de' due ACE, ECB darà l'altro angolo ACB.

Esempio. Sia AC miglia 120, CB miglia 260, AB miglia 370. Si cercano gli angoli. Il lato massimo è AB: la somma degli altri due AC, CB sarà 380; la loro differenza 140. Dunque così deesi ordinare la proporzione. Lato massimo AB (370) : somma degli altri due lati AC, CB (380) : : differenza di questi lati (140) : differenza DB della base; ne viene DB differenza della base $143\frac{29}{37}$. Questo numero sottratto da AB, cioè da 370, lascia AD di $225\frac{8}{37}$; la cui metà AE sarà $113\frac{4}{37}$. Ora dunque nel triangolo AEC, nel quale è dato il perpendicolo AE di 113 (trascurando, se si vuole, la frazione), e l'ipotenusa AC di 120, oltre l'ango-

X lo

lo retto E, operando secondo l'articolo 28, si farà AC (120): AE (113) : : raggio (100000) : sino dell' angolo ACE; ne viene il sino dell' angolo ACE di 94167; onde l' angolo ACE viene ad essere di gr. 70. 20', e per conseguente l' angolo A di gr. 19. 40'. E questo è già uno degli angoli, che si cercano del triangolo ACB.

Aggiugnendo ora AE ($113\frac{4}{37}$) a DB ($143\frac{29}{37}$) si avrà EB, $256\frac{33}{37}$, o pure (trascurando, se si vuole, la frazione) 257. Pertanto nel triangolo CEB, nel quale è dato il perpendicolo EB (257), e l' ipotenusa CB (260), oltre l' angolo E retto, faremo, secondo l' articolo 28 CB (260) : EB (257) : : raggio (100000) : sino dell' angolo BCE, e ne ricaveremo il sino dell' angolo BCE di 98846, onde l' angolo BCE sarà di gr. 81. 17'. 15', e l' angolo CBE, che è uno de' tre, che si cercano, sarà di gr. 8. 42 45'. Finalmente sommando i due, ACE, trovato di sopra gr. 70. 20', e BCE, determinato ora di gr. 81. 17'. 15', avremo tutto l' angolo ACB (che è anch' esso uno de' tre del dato triangolo ACB, i quali si cercano) di gr. 151. 37.' 15". Il che era da fare.

37 In tutt' i triangoli rettilinei, dati i tre angoli trovare la proporzione de' lati. Si prendano i sini degli angoli opposti a quei lati, de' quali si cerca la proporzione. E' manifesto (per l' articolo 21), che i numeri di questi sini esprimeranno la proporzione cercata de' detti lati.

Esempio. Sia l' angolo B di gradi 58. 14'; l' angolo BAC (*Fig.* 21) di gr. 103. 25'; e per conseguenza l' angolo C di gr. 18. 21'. Si cerca la proporzione del lato BA al lato BC. Il sino dell' angolo C, opposto al lato BA, è 31482. Il sino dell' angolo A, opposto al lato BC (del qual angolo, per esser ottuso, dee cercarsi prima il supplemento 76. 35', col quale egli ha comune il sino) trovasi 97271. Starà dunque il lato BA, al lato BC, come 31482 a 97271.

38 Benchè colle regole fin' ora spiegate si possano sciorre tutte le questioni della Trigonometria piana, nulladimeno considerando i moderni Geometri, che la pratica di queste regole è spesse volte faticosa per la necessità, che vi è di molti-

pli-

plicare talvolta, e di dividere numeri assai grandi, hanno pensato, e trovato un metodo di facilitarla, col sostituire a quei numeri, che si debbono maneggiare nelle operazioni trigonometriche, alcuni altri numeri, che chiamano logaritmi, col mezzo de' quali si schivanq le moltiplicazioni, e le divisioni; e in vece di esse si spediscono i calcoli colle semplici addizioni, e sottrazioni. Di questi logaritmi [de' quali il primo inventore fu il Nepero sul principio del secolo passato, e che poi sono stati ridotti a maggior perfezione, e facilità da altri scrittori] diremo ora qualche cosa per compimento del presente trattato, cioè quanto basta a intenderne l'uso nelle operazioni trigonometriche.



APPENDICE

ALLA TRIGONOMETRIA,

Cioè Trattato de' logaritmi, e del loro uſo nella ſoluzione de' triangoli.

Che coſa ſieno i logaritmi.

39 SIa una ſerie, o progreſſione geometrica A di numeri, che creſcano in qualſivoglia ragione (come quì nella ragione tripla), ed un'altra progreſſione aritmetica B d'altrettanti numeri, che creſcano anch'eſſi con qualſivoglia differenza [come quì colla differenza 2]. Se ciaſcun termine della ſeconda s'intenderà corriſpondere a ciaſcun termine della prima ſerie, per ordine, cioè il primo al primo, il terzo al terzo &c., allora i termini della progreſſione aritmetica B ſi diranno *logaritmi* di quelli della geometrica A, ciaſcuno del ſuo corriſpondente; come quì o ſarà logaritmo di 1; 6 ſarà logaritmo di 27 &c.

40 Se nella ſerie geometrica ſi prenderanno due numeri diſtanti fra loro di qualunque intervallo (cioè, che abbiano fra mezzo qualſiſia numero di termini), e ſi cercherà il terzo proporzionale ad eſſi due numeri preſi, queſto ſi troverà nella medeſima ſerie tanto diſtante dal ſecondo, quanto lo è queſto dal primo. Come prendendo 3, e 27, il terzo proporzionale, che è 243 è diſtante dal 27 due intervalli, appunto quanto lo è 27 da 3. E parimente ſe ſi prenderanno tre termini della medeſima ſerie, che abbiano qualſivoglia intervallo, eguale, o diſeguale fra eſſi, il quarto proporzionale ſi troverà nella ſteſſa ſerie tanti intervalli diſtante dal terzo, quanti il ſecondo dal primo. Come prendendo 3. 27. 729, il quarto proporzionale ſarà 6561 diſtante dal 729 due intervalli, appunto quanto il 27 è diſtante dal 3. La dimoſtrazione di tutto queſto, come pure di alcune altre proprietà di queſte progreſſioni, che ſiamo per aggiungere, ſi tralaſciano, sì perchè non ſo-

ſono difficili a ritrovarſi, sì anche, perchè propriamente appartengono all' aritmetica.

41 Da ciò ſegue, che preſi nella ſerie geometrica tre termini proporzionali, i loro logaritmi creſceranno per differenze eguali. Così perchè 3. 27. 243 ſono proporzionali, i loro logaritmi 2. 6. 10 creſcono con differenza eguale, che è di 4. Parimente preſi nella ſerie geometrica quattro termini proporzionali, i logaritmi de' due ultimi avranno differenza eguale a quella de' due primi. Per eſempio eſſendo 3. 27. 729. 6561 proporzionali, i logaritmi 12. 16 de' due ultimi hanno differenza di 4 appunto quanto ne hanno i logaritmi 2. 6 de' due primi.

42 Quando tre numeri creſcono con differenze eguali (come 2. 6. 10) la ſomma de' due eſtremi (12) è eguale al doppio del termine di mezzo (12). E parimente quando ſono quattro numeri; e la differenza de' due primi è eguale a quella de' due ultimi (come 2. 6. 12. 16) la ſomma de' due eſtremi (18) è eguale alla ſomma di que' di mezzo (18).

43 Da tutto ciò ſi raccoglie, che quando tre numeri ſono proporzionali, la ſomma de' logaritmi degli eſtremi è uguale al doppio del logaritmo di quello di mezzo; e che quando quattro numeri ſono proporzionali, la ſomma de' logaritmi degli eſtremi è eguale alla ſomma de' logaritmi de' due di mezzo. Così perchè 3. 27. 243 ſono proporzionali, facendo la ſomma del logaritmo di 3, che è 2, col logaritmo di 243, che è 10 (la qual ſomma è 12), ella ſi trova appunto eguale al doppio del logaritmo di 27, il qual logaritmo è 6, e il ſuo doppio 12. E parimente, perchè 3 27. 729. 6561 ſono proporzionali, facendo la ſomma del logaritmo di 3, che è 2, col logaritmo di 6561, che è 16 [la qual ſomma è 18] ella ſi troverà eguale alla ſomma del logaritmo di 27, che è 6, col logaritmo di 729, che è 12, la qual ſomma è appunto 18.

Conve

Come per mezzo de' logaritmi le moltiplicazioni si cangino in addizioni, e le divisioni in sottrazioni.

44 DA ciò è manifesto, come dati in una serie geometrica A due numeri, e data la serie B de' logaritmi di quella, si possa trovare il terzo proporzionale a' detti due numeri, senza uopo di moltiplicazione, o di divisione. Imperocchè dovendo la somma de' logaritmi del primo, e del terzo essere eguale al doppio del logaritmo del secondo (art. 43), basterà cercare nella serie de' logaritmi quello del secondo numero, e raddoppiato questo logaritmo, sottrare il logaritmo del primo, che si troverà dalla stessa serie di logaritmi, e quello, che ne risulterà, sarà il logaritmo del terzo numero proporzionale; il qual logaritmo cercato nella detta serie di logaritmi, avrà di rincontro nella serie geometrica il numero, che gli corrisponde, e questo sarà il terzo proporzionale, che si brama; il che è molto più comodo, che moltiplicare il secondo numero per se stesso, e poscia dividerlo per lo primo, come prescrive la regola aurea ordinaria. Così per trovare il terzo proporzionale a' due numeri 3, e 27 (che amendue sono nella serie geometrica A) raddoppio il logaritmo di 27, che è 6, e faccio 12, dal quale tolto il logaritmo di 3, che è 2, resta 10, logaritmo del terzo proporzionale; e pertanto cercando 10 nella serie de' logaritmi, prendo il numero 243, che gli corrisponde nella serie geometrica A, e questo è il terzo proporzionale bramato. Nell' istessa maniera per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri della serie geometrica, giacchè la somma de' logaritmi del secondo, e del terzo dee esser eguale (art. 43) alla somma de' logaritmi del primo, e del quarto; basterà cercare nella serie de' logaritmi quelli del secondo, e del terzo, che sono dati, e fattane la somma, sottrarne il logaritmo del primo, che parimente è dato, e quello, che ne verrà, sarà il logaritmo del quarto proporzionale, che si brama; onde esso quarto proporzionale sarà quel numero, che nella serie geometrica si troverà corrispondere a quest' ultimo logaritmo. Così per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri 3. 27. 729 (che tutti sono nella serie geometrica A)

A) prendo il logaritmo del ſecondo 27, che è 6, e vi aggiungo il logaritmo del terzo 729, che è 12, e faccio 18, da cui ſottraggo il logaritmo del primo 3, che è 2, e reſta 16, il quale cercato nella ſerie de' logaritmi, mi dà di rincontro nella ſerie geometrica 6561, e queſto è il quarto proporzionale, che ſi bramava. E con ciò ſi vede il comodo de' logaritmi, che conſiſte nel cangiare le moltiplicazioni, che dovrebbono farſi de' numeri, in ſemplici addizioni de' loro logaritmi, e le diviſioni di quelli in ſottrazioni di queſti.

45 Anzi quando la ſerie Geometrica abbia per primo termine l'unità, e quella de' logaritmi abbia per logaritmo corriſpondente all'unità il zero (come hanno le ſerie qui eſpoſte A, e B) un altro uſo può ricavarſi da' logaritmi, che è quello di trovare ſpeditamente il prodotto, che naſcerebbe dalla moltiplicazione di due numeri dati della ſerie; mentre a ciò fare baſta unir inſieme i logaritmi de' due numeri ſuddetti, e la ſomma ſarà il logaritmo, che converrà al prodotto. Come per trovar il prodotto di 9 per 243 (che amendue ſono nella ſerie A) ſenza aver uopo di moltiplicare l'uno per l'altro, faccio la ſomma de' loro logaritmi 4, e 10, che è 14, e queſto logaritmo mi moſtra, che il prodotto della loro moltiplicazione è 2187, giacchè queſto è il numero, che veggo corriſpondere al logaritmo 14. La ragione di queſto è, perchè ogni prodotto, ſe ben ſi conſidera, naſce da una operazione della regola aurea, mentre egli è il quarto proporzionale dopo l'unità, che può fingerſi il primo numero, e i due numeri, che ſi moltiplicano, che poſſono fingerſi il ſecondo, e il terzo, atteſochè quante volte è contenuta l'unità in uno de' numeri, che ſi debbono moltiplicare, altrettante dee eſſer contenuto l'altro numero nel prodotto, che ſi cerca. Poichè dunque per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri dati ſi prende la ſomma de' logaritmi del ſecondo, e del terzo, e ſe ne leva il logaritmo del primo, con che reſta il logaritmo del quarto, che ſi cercava (art.40), e nel caſo preſente il primo numero è l'unità, il cui logaritmo ſuppongo eſſere zero, che ſottratto niente muta la ſomma de' logaritmi ſuddetti, è manifeſto, che il logaritmo del prodotto bramato di qualſiſia moltiplicazione ſarà eguale alla ſomma de' logaritmi de'numeri, che ſi debbono moltiplicare inſieme.

46

46 Per una simil ragione (posto sempre, che il zero sia il logaritmo dell' unità) si troverà speditamente il quoziente della divisione di due numeri della serie, sottraendo il logaritmo del divisore dal logaritmo di quello, che si dee dividere, mentre il residuo sarà il logaritmo del quoziente. Così volendo dividere 6561 per 27 (che amendue sono numeri della serie A). Dal logaritmo di quello, che è 16, sottraggo il logaritmo di questo, che è 6, e resta 10, che veggo essere il logaritmo di 243, onde il quoziente della divisione sarà 243. Di questo ancora può rendersi ragione in un modo simile a quello dell' articolo precedente, che tralasceremo per brevità.

47 Finalmente, perchè il quadrato di qualsivoglia numero non è altro, che il prodotto di questo, moltiplicato in se stesso, è manifesto (art. 45), che il logaritmo del quadrato sarà doppio del logaritmo della radice (posto sempre, che il logaritmo dell' unità sia zero. Onde dato qualsisia numero della serie A, come 81, troveremo speditamente il quadrato con raddoppiare il logaritmo 8, che sarà 16, il quale si troverà essere logaritmo di 6561, che sarà il quadrato di 81. All' incontro dato qualsisia numero, come 6561 ne troveremo la radice quadrata prendendo la metà del suo logaritmo 16, che fa 8; e questo (se si troverà nella serie de' logaritmi B, come nel nostro caso vi si trova) corrisponderà alla radice quadrata, che si brama, che nel caso presente si troverà essere 81. Per una simil ragione il cubo de' numeri della serie A si troverà triplicandone il logaritmo, e la radice cubica all' incontro, prendendo la terza parte del logaritmo; e così delle altre potestà, e radici di grado superiore.

48 Da tutto questo si vede, che se potesse aversi una serie geometrica, nella quale entrassero tutt' i numeri possibili, che cominciando dall' unità si seguono ordinatamente, cioè 1. 2. 3. 4. 5. 6 &c. assegnata, che fosse a questa serie un' altra serie di logaritmi, tutte le più difficili operazioni aritmetiche, cioè le moltiplicazioni, le divisioni, e le estrazioni delle radici si potrebbero sempre risparmiare col soccorso di questi logaritmi; mentre non vi sarebbe alcun numero, che non fosse nella serie, e di cui per conseguenza non potesse aversi il logaritmo per valersene nelle dette operazioni, il che non succede

cede nella serie A posta da noi per cagion d'esempio, coll' altra aritmetica B, mentre mancando in quella molti numeri, come 2. 4. 5. 6 &c. tutto il vantaggio, che può aversi da' logaritmi della serie B, si ha solo in que' casi, ne' quali si tratta di numeri, che si trovino nella serie A, restando essa inutile per gli altri numeri. Benchè però non sia possibile una serie geometrica, che comprenda, come si è detto, tutt' i numeri naturali, e con ciò paja a prima vista, che l'uso de' logaritmi non possa essere universale, nè estendersi a tutt' i casi possibili delle suddette operazioni aritmetiche, che occorra di fare, hanno tuttavia i Geometri provveduto in modo, che almeno a un dipresso, e senza errore sensibile possa farsi uso de' logaritmi in ogni caso, che venga, e ciò nella maniera, che oramai siamo per ispiegare.

De' logaritmi comuni.

49 Sia una serie geometrica C, i cui numeri crescano in qualsivoglia ragione, come quì nella ragione ottupla; e sia D una serie di logaritmi assegnati alla serie C, che crescano con qualsivoglia differenza, come quì colla differenza di 3. Se fra' due primi termini della serie C, che sono 1. 8, prenderemo uno, o più numeri medj proporzionali in proporzione continua, verbi grazia due, che saranno i numeri 2. 4; e parimente altrettanti medj proporzionali, cioè altri due, ne prenderemo fra i due termini 8, e 64, i quali medj sieno 16, e 32, e così proseguiremo formando con questi numeri la colonnetta *c*, è manifesto, che la serie, che risulterà dalle due C, *c* prese insieme, cioè 1. 2. 4. 8 &c. (la quale si vede in E) sarà una nuova serie geometrica, non però più in ragione ottupla, ma in un'altra, che nel nostro caso è la ragione doppia. Ciò posto, per assegnare a questa serie nuova E, composta dalle due C, *c*, i suoi logaritmi, senza variare quelli, che già nella serie D sono assegnati a ciascun termine della serie C; basterà prendere fra' termini della serie D altrettanti medj proporzionali aritmetici, quanti geometrici se ne sono presi fra' termini della serie C, cioè nel nostro caso, due per ciascun intervallo, che saranno 1. 2 nel primo intervallo;

lo; 4. 5 nel ſecondo &c., come ſi vede nella colonnetta *d*; e allora la ſerie, che ſi comporrà dalle due D, *d* preſe inſieme, cioè 0. 1. 2. 3. 4. &c., la quale ſi vede in F, ſarà anch'eſſa una ſerie aritmetica di logaritmi corriſpondenti alla ſerie E (non però più colla differenza di 3, ma con altra differenza, che nel noſtro caſo ſarà di 1), e a ciaſcun numero di queſta ſarà aſſegnato il ſuo logaritmo, ſenza che ſi ſieno mutati quelli, che prima nella ſerie D corriſpondevano alla ſerie C. Di tutto queſto tralaſceremo per brevità la dimoſtrazione, che non è difficile da ritrovare. Aggiungeremo ſolamente, che ſebbene queſto ſi è eſemplificato ſolamente in numeri intieri, e in proporzioni molteplici, dee però valere in tutt'i numeri, anche rotti, e in tutte le proporzioni poſſibili.

50 Su queſto fondamento è ſtata calcolata dagli autori una ſerie di logaritmi, che chiamanſi *comuni*, e che coſtituiſce quello, che diceſi *canone logaritmico de' numeri aſſoluti*, nel quale ſi hanno i logaritmi (ſe non preciſamente, almeno a un dipreſſo, e quanto baſta per non errare ſenſibilmente nella pratica) di tutt' i numeri interi dall' 1 fino a diecimila, e poſſono anche ricavarſene quelli di tutti gli altri interi, almeno fino a diecimillioni, anzi quelli di tutt' i numeri rotti, o intieri con rotti fino a queſto termine con incredibil comodo in ogni ſorta di calcoli, che occorrano, e particolarmente nelle operazioni trigonometriche. Hanno dunque eſſi preſa la ſerie de' numeri decadici 1. 10. 100. 1000 &c., come vedeſi in A, che è una ſerie geometrica in ragione decupla; e a ciaſcun numero di queſta ſerie hanno aſſegnati per logaritmi i numeri 0. 10000000. 20000000. 30000000 &c., che ſi veggono nella ſerie B, che è una ſerie aritmetica, che creſce colla differenza di diecimillioni. Immaginando poſcia, che fra il primo termine 1, e il ſecondo 10 della ſerie A ſieno interpoſti novemillioni novecentonovantanove mila, e novecentonovantanove medj proporzionali, che inſieme col ſecondo termine 10 coſtituiſcano diecimillioni di termini (il primo di queſti termini viene ad eſſere $1\frac{23025853}{100000000000000}$, e gli altri ſeguono di mano in mano ſempre colla proporzione, che ha l'unità a queſto rotto), ed altrettanti fra il termine 10, e il 100,

fra

fra il 100, e il 1000 &c., hanno altresì figurati altrettanti medj aritmetici fra i termini della ſerie B (i quali medj aritmetici vengono ad eſſere nel primo intervallo, 1. 2. 3. 4. 5, &c. fino a 10000000, nel ſecondo intervallo 10000001. 10000002. 10000003 &c., e così degli altri): onde per le coſe poc' anzi dette la ſerie, che riſulta da' numeri decadici della ſerie A, e da' detti medj geometrici preſi fra queſti viene a coſtituire una nuova ſerie geometrica, a ciaſcun termine della quale viene a corriſpondere per logaritmo ciaſcun termine dell' altra ſerie aritmetica, che riſulta da' numeri della ſerie B, e da' detti medj aritmetici preſi fra queſti numeri.

51 E perchè i numeri di queſta ſerie geometrica così compoſta ſebbene a riſerva dell' 1, e de' decadici, vengono tutti ad eſſere rotti, nulladimeno alcuni di queſti rotti per neceſſità, e a cagione de' piccoliſſimi intervalli, che hanno fra loro, cadono sì preſſo agli intieri, che ſe ne può ſenza errore traſcurare la differenza, e prenderli come ſe foſſero gli ſteſſi interi viciniſſimi a tali rotti, ne vi ha alcun numero intiero almeno dall' 1 al diecimila, che non ſia viciniſſimo a qualch' uno de' rotti, che coſtituiſcono la detta ſerie geometrica; perciò, hanno ſcelti i logaritmi di que' ſoli termini rotti della ſerie, che inſenſibilmente differiſcano dagli interi, e gli hanno aſſegnati per logaritmi degli interi loro più vicini; e con cio hanno formato il canone, in cui ogni numero intero è venuto ad avere il ſuo logaritmo, che non è veramente preciſo, ſe non riſpetto a' numeri decadici, ma è sì poco lontano dal preciſo, che ſi può prendere per giuſto ſenza ſcrupolo d' errore. A cagion d' eſempio hanno veduto, che ſebbene il numero intero 9 non entra nella detta ſerie geometrica, ben vi entra il numero rotto $8\frac{9999998}{10000000}$, il cui logaritmo hanno trovato eſſere 9542425; ma perchè la detta frazione $8\frac{9999998}{10000000}$ non manca dall' intero 9, che due diecimilleſime parti, hanno traſcurata tal differenza, ed hanno aſſegnato al numero intero 9 il detto logaritmo 9542425; e in ſimil guiſa hanno aſſegnati i logaritmi a tutti gli altri numeri interi fino a diecimila, potendoſi da queſti ſoli ricavar quelli de' numeri anche

maggiori di diecimila, come tra poco vedremo. Molte cose potrebbero quì dirsi intorno a' metodi, che hanno tenuti nel far questi calcoli compendiosamente, e senza esser obbligati a ricavare uno per uno un numero sì esorbitante di medj geometrici, ed aritmetici, ma lo studio della brevità ci obbliga a tralasciarle.

52 Non è dunque il canone de' logaritmi una serie geometrica di numeri proporzionali, a cui corrisponda un' altra serie aritmetica de' loro logaritmi; ma è una scelta di que' soli numeri ricavati dalla serie geometrica detta di sopra, che erano più utili per gli usi delle calcolazioni, cioè de' soli interi (giacchè tutti questi o rigorosamente, o prossimamente entrano nella detta serie) co' loro corrispondenti o prossimamente, o rigorosamente nella detta serie aritmetica, restando esclusi gli altri numeri rotti, ancorchè la serie geometrica per la maggior parte fosse costituita precisamente di questi; il che non ostante si può, colle regole da darsi appresso, assegnare anche a qualsivoglia rotto il suo logaritmo per mezzo di quelli degli intieri: e il logaritmo del canone d' un qualsivoglia numero non viene ad esser altro, che il numero de' termini, o sia degli intervalli, che si contano fra l' unità, ed esso numero in quella serie geometrica, che si è detta, e da cui il canone è stato ricavato; mentre, come abbiamo veduto, il logaritmo del primo termine della detta serie dopo l' unità è 1, quello del secondo termine, è 2, quello del 10000000mo termine (che è il numero intero 10) è 10000000, e così degli altri.

53 E' da avvertire, che gli autori del canone ad effetto di dare a tutt' i logaritmi un numero eguale di figure, cioè otto per ciascuno (il che riesce di molto comodo nelle calcolazioni, e in ogni uso, che voglia farsi del canone, come tra poco vedremo) suppliscono le figure, che mancano ad otto (quando ne manchino) con altrettanti zero aggiunti alla sinistra alle figure, che ha quel logaritmo. Così un logaritmo, che fosse, 1 si scriverebbe 00000001, un logaritmo, che sia 3010300, si scriverà 03010300, e così degli altri.

Pro-

Proprietà ſpeciali de' logaritmi comuni.

54 DAlle coſe fin quì dette ſi raccoglie, che tutt' i numeri dall' uno fino al 10 eſcluſivamente, cioè tutti quelli, che ſi ſcrivono con una ſola figura aritmetica (o abbiano poi, o non abbiano anneſſe frazioni) avranno nel loro logaritmo nel primo luogo a ſiniſtra un zero; ſiccome quelli, che hanno il logaritmo neceſſariamente minore di quello del numero 10, che è 10000000. Così pure tutti quelli, che ſi ſcrivono con due figure, cioè dal 10 al 100 eſcluſivamente, avranno nel logaritmo per prima figura l' unità 1; quelli dal 100 al 1000 avranno per prima figura un 2 &c., e generalmente la prima figura del logaritmo d' un numero è di tante unità meno una, quante ſono le figure, colle quali ſi eſprime, e ſi ſcrive quel numero, non comprendendo però le figure della frazione, che a lui foſſe anneſſa. Queſta prima figura a ſiniſtra di ciaſcun logaritmo diceſi *carateriſtica*, e ſuole dagli autori ſepararſi dalle altre ſeguenti con un punto. Ma è da avvertire, che la carateriſtica medeſima potendo eccedere il numero 9 (come ſe ſi trattaſſe del logaritmo d' un numero, che ſi ſcriveſſe con undici figure) dee per conſeguenza eſprimerſi allora con più d' una figura; e perciò quando ſi diſſe (art.53), che i logaritmi tutti ſi ſcrivono con 8 figure, ciò ſi dee intendere conſiderando la carateriſtica per una ſola figura, ancorchè foſſe di più figure. Generalmente dunque ne' logaritmi comuni, levando le 7 ultime figure a deſtra, quell' una, o più, che rimangono a ſiniſtra, ſaranno la carateriſtica. Pertanto dato un numero ſapremo di quante unità ſia la carateriſtica del logaritmo di eſſo, levando 1 dal numero delle figure, colle quali il dato numero ſi eſprime, e all' incontro dato un logaritmo ſapremo di quante figure ſia il numero, a cui conviene, aggiungendo 1 al numero della carateriſtica di eſſo logaritmo; ſenza metter mai in conto le frazioni, che per avventura foſſero anneſſe al numero, di cui ſi tratta.

55 Quando un numero, qualunque egli ſia, intero, o rotto, trovaſi nella ſerie geometrica, dalla quale è ricavato il canone de' logaritmi comuni, anco il decuplo, il centuplo &c. di

di quel numero sarà nella medesima serie, e così ancora il suddecuplo, il subcentuplo &c. Imperocchè come 1 a 10, così sta qualsivoglia numero al suo decuplo, e come 1 a 100, così qualsivoglia numero al suo centuplo &c. Dunque il decuplo d'un numero, che sia nella detta serie, non è altro, che il quarto proporzionale a questi tre numeri 1, 10, e il dato, i quali sono tutti e tre nella serie suddetta. Ma quando tre numeri sono in una serie geometrica, vi è anco il quarto proporzionale ad essi (art.40); dunque quando un numero è nella serie, di cui parliamo, vi è anco il suo decuplo; e il medesimo si mostrerà del centuplo &c., come pure del suddecuplo &c. Da ciò segue, che essendo tutt' i numeri interi, o rigorosamente, o prossimamente nella detta serie [art. 51] anche i decupli, i centupli &c., come pure i suddecupli, subcentupli &c. di tutti gli interi saranno nella medesima serie, o precisamente, o prossimamente, ancorchè per avventura questi suddecupli &c. fossero rotti; e perciò dovranno avere un numero nella serie de' logaritmi, che corrisponda loro come logaritmo. Il modo di trovarlo tra poco s' insegnerà.

56 Due numeri, uno de' quali sia decuplo, centuplo &c. dell' altro, hanno per necessità i loro logaritmi, che convengono in tutte le figure, e differiscono solamente nella carateristica. Così il logaritmo di 92 trovasi nel canone 1.9637878, e quello di 9200 [centuplo di 92] è 3.9637878, cioè l' istesso, che il primo, salvo nella carateristica, che in quello è 1 (come conviene al numero 92 di due figure per l'art. 54), e in questo 3 (come conviene al numero 9200 di quattro figure per lo stesso art.). La ragione è, perchè il decuplo, il centuplo &c. d' un numero, altro non è, che il prodotto di quel numero per 10, per 100 &c., e perciò il logaritmo d' un qualsivoglia numero, aggiunto al logaritmo di 10, di 100 &c. viene a formare il logaritmo del suo decuplo, del suo centuplo &c. [art. 45]. Ora quando ad un logaritmo si aggiunge il logaritmo di 10, di 100 &c. nella somma ne proviene lo stesso logaritmo di prima, salvo nella carateristica (imperocchè i logaritmi di 10, di 100 &c. non hanno numeri fuorchè nella carateristica, essendo gli altri luoghi riempiti con zero, come all' art. 50 si è veduto). Dunque il logaritmo

ritmo del decuplo, del centuplo &c. d' un qualsivoglia numero non è diverso dal logaritmo di questo numero, fuorchè nella carateristica.

57 Su questi fondamenti passeremo a mostrare, come dal canone de' logaritmi comuni si possa trovare il logaritmo di qualsisia numero intero, o rotto dato, e al contrario, come dato qualsivoglia logaritmo si possa trovare il numero intero, o rotto, che gli corrisponde; avvertendo però prima, rispetto a' numeri rotti, che col nome di questi sempre intenderemo le frazioni decimali, cioè frazioni di parti decime, o di centesime; o di millesime &c. Onde quando fosse data una frazione non decimale, come $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{15}$ &c. dovrà intendersi prima ridotta in decimale, il che può sempre farsi, almeno prossimamente, con questa regola: come il denominatore della frazione data a quel denominatore decimale, che vuol prendersi (verbi grazia 10, o pure 100, o sia 1000 &c.) così il numeratore della frazione data al quarto numero, che sarà il numeratore della frazione ridotta. A cagion d' esempio per ridurre $\frac{3}{4}$ in frazione centesima, faremo come 4 a 100, così 3 al quarto numero, che sarà 75; onde la detta frazione ridotta in centesima sarà $\frac{75}{100}$. E per ridurre $\frac{7}{15}$ v. gr. in millesime faremo come 15 a 1000, così 7 al quarto, che sarà prossimamente 467, onde la frazione ridotta sarà $\frac{467}{1000}$; e così negli altri casi.

Come dal canone de' logaritmi si ricavi il logaritmo di qualsivoglia dato numero, intero, o rotto.

58 SE il numero, di cui si cerca il logaritmo, è intero; ed è minore di diecimila, egli si troverà nel canone logaritmico dirimpetto al dato numero; anzi nel canone grande d' Ulacq, e di alcuni altri si trovano i logaritmi di tutti gli interi fino a centomila, ma noi supporremo, che uno voglia valersi del canone ordinario, che non eccede diecimila.

Così

Così il logaritmo di 2 trovaſi 0.3010300, quello di 999, ſi trova 2.9995655, quello di 7678 trovaſi 3.8852481; e così degli altri.

59 Ma ſe il dato numero o non è intero, o eſſendolo è maggiore di diecimila, talchè non ſia regiſtrato nel canone, allora convien vedere ſe partendolo, o moltiplicandolo per 10, ovvero per 100, o ſia per altro numero decadico egli poſſa ridurſi ad un intero, che ſia minore di diecimila, e perciò ſi trovi nel canone; e ſe ciò ſuccede, prenderaſſi per logaritmo del dato numero quello del numero, a cui egli colla detta diviſione, o moltiplicazione ſarà ſtato ridotto, con mutargli ſolo la carateriſtica, dandogli quella, che conviene al numero dato, cioè una carateriſtica di tante unità, quante ſono le figure del detto numero, meno una, e ſenza metter in conto le figure delle frazioni; come è manifeſto per le coſe dette agli articoli 54, e 56. Gli eſempj ſaranno meglio intender queſte regole.

Eſempio primo. Si cerchi il logaritmo del numero 92860. Partendo queſto numero per 10 ne viene 9286, che è intero, ed è minore di diecimila. Il logaritmo di queſto ſi trova nel canone 3.9678287. Mutata dunque ſolamente la carateriſtica 3 in 4 (perchè il dato numero 92860 ha cinque figure) ſarà il logaritmo cercato 4.9678287.

Eſempio ſecondo. Si deſidera il logaritmo del numero $282\frac{7}{10}$. Moltiplicandolo per 10 ne viene 2827, che è intero, e minore di diecimila. Il logaritmo di queſto è nel canone 3.4513258; e mutata ~~debitamente la~~ carateriſtica ne viene il logaritmo bramato 2.4513258.

60 Che ſe non poteſſe riuſcire di ridurre colla moltiplicazione, o colla diviſione per numeri decadici il dato numero ad eſſer intero, e minore di diecimila; allora ſi riduca almeno ad un intero con rotto, maggiore di 1000, e minore di 10000, e il logaritmo di queſto ſi ricavi dal canone col mezzo della parte proporzionale, come ſi pratica nel canone trigonometrico, e in tutte le altre tavole: operazione, che veramente non è giuſtiſſima, ma può praticarſi ſenza ſcrupolo d'errore ſenſibile; e mutando poſcia debitamente al detto logaritmo, così ricavato, la carateriſtica, ſi avrà il logaritmo cercato.

Eſem-

Eſempio primo. Si cerchi il logaritmo del numero $631\frac{34}{100}$. Moltiplicandolo per 100 faccio 63134, e partendo poſcia queſto per 10, ne viene $6313\frac{4}{10}$, che è maggior di 1000, e minore di diecimila. Di queſto numero rotto $6313\frac{4}{10}$ il logaritmo, preſa la parte proporzionale, ſi trova 3.8002633, onde mutata debitamente la carateriſtica, il logaritmo cercato ſarà 2.8002633.

Eſempio ſecondo. Si deſideri il logaritmo del numero 47549. Partendolo per 10 ne viene $4754\frac{9}{10}$, che è maggior di 1000, e minore di diecimila. Il logaritmo di queſto ſi trova per mezzo della parte proporzionale eſſere 3.6771413; onde il logaritmo del dato numero ſarà 4.6771413.

Eſempio terzo. Si cerca il logaritmo del numero $15420\frac{27}{100}$. Moltiplicando per 100, e ſucceſſivamente partendo per 1000, ne proviene $1542\frac{027}{1000}$, e il logaritmo, preſa la parte proporzionale, e mutata la carateriſtica ſi troverà 4.1880920.

61 E d' avvertire, che quando il numero dato eccedeſſe diecimillioni, i logaritmi non poſſono averſene dal canone ordinario con quella eſattezza, che ſpeſſe volte può eſſere neceſſaria nelle calcolazioni. Ma nell' opera grande dell' Ulacq, ed anco in altri autori trovaſi un canone, in cui i logaritmi hanno maggior numero di figure, e poſſono ſervire eſattiſſimamente per ſimili grandiſſimi numeri; onde a queſti autori conviene ricorrere in tali caſi.

Come dato qualſivoglia logaritmo ſi trovi per mezzo del canone il numero, che gli corriſponde.

62 SE il dato logaritmo ſi troverà preciſamente nel canone, il numero, che gli corriſponde, gli ſi vedrà ſcritto a ſiniſtra. Se non vi ſi troverà, mutiſi la carateriſtica del logaritmo in un 3, e veggaſi ſe ſi trovi nel canone colla carate-

Z ſtica

ristica così mutata, e ciò succedendo, il numero, che gli risponde, dovrà moltiplicarsi, o dividersi per 10, per 100, per 1000 &c., finchè divenga di tante figure, quante ne richiede la carateristica del logaritmo dato, cioè quante unità contiene questa, più una; e quello, che ne risulterà sarà il numero, che converrà al dato logaritmo.

Esempio primo. Se fosse proposto il logaritmo 2.2247920, che non trovasi nel canone, mutata la carateristica 2 in 3 avremo 3.2247920, che vi si trova. Il numero, che corrisponde a questo è 1678, che è di 4° figure, ma perchè la carateristica 2 del dato logaritmo non lo richiede, che di tre, divido 1678 per 10, e ne proviene $167\frac{8}{10}$, che sarà il numero cercato.

Esempio secondo. Sia dato il logaritmo 7.8949803. Sostituendo alla carateristica 7 un 3, faremo 3 8949803, e trovaremo, che a questo logaritmo corrisponde il numero 7852, che è di 4° figure. Per averlo dunque di 8°, come lo domanda la data carateristica 7, lo moltiplicheremo per 10000, ed avremo 78520000 numero cercato.

63 Che se poi il logaritmo dato ne pure dopo avergli mutata la carateristica in 3, si trovasse precisamente nel canone, fingasi ciò non ostante, che la carateristica sia 3, o sia veramente, o non sia, e presi i due logaritmi prossimi tra' quali cade il dato, cerchisi la frazione decadica, che gli corrisponde per mezzo della parte proporzionale, la qual frazione si aggiunga al numero intero, che corrisponde al minore de' due prossimi logaritmi suddetti. ~~Ma in questa~~ operazione è d'avvertire, che il denominatore decadico di tal frazione, che si cerca, se il logaritmo dato aveva 3, o pure meno di 3 per carateristica, sarà arbitrario, ma se aveva più di 3, dovrà questo denominatore prendersi di tante cifre, o zero, quante figure mancano al detto numero intero per far il numero di figure, che richiede la data carateristica. Trovato dunque il detto intero colla dovuta frazione, se la carateristica era 3, egli sarà il numero, che conviene al dato logaritmo; ma se era maggiore, o minore di 3, si dovrà moltiplicare, o dividere il numero così trovato per quel numero decadico, che bisogna, affinchè il numero intero, che ne risulterà abbia quel numero

di

di figure, che conviene alla data caratteriſtica (reſti poi, o non reſti oltre queſto una frazione), e queſto ſarà il numero, che corriſponderà al dato logaritmo.

Eſempio primo. Sia dato il logaritmo 5.8962640, il quale, mutata la caratteriſtica in 3, diviene 3.8962640. E perchè ne pure così trovaſi nel canone, prendo i due logaritmi proſſimi 3.8962506, e 3.8963057, fra' quali egli cade, che convengono a due numeri interi 7875, 7876; onde il numero, che conviene al logaritmo dato colla caratteriſtica 3 è 7875 con un rotto, che rimane da cercare. Per trovarlo dunque oſſervo, che la data caratteriſtica 5 richiede un numero intero di ſei figure, e quì non l' abbiamo, che di quattro; dunque due ne biſognano; e perciò prendo il denominatore decadico 100, come quello, che ha due zero, e cerco nel modo ſolito quante di coteſte parti centeſime convengono al logaritmo ſuddetto, e trovo $\frac{24}{100}$. Dunque ſe la caratteriſtica data foſſe 3, il numero cercato ſarebbe $7875\frac{24}{100}$; ma perchè ella è 5, il numero ſuddetto dovrà avere 6 figure, onde lo moltiplico per 100, e faccio 787524, che ſarà il numero cercato.

Eſempio ſecondo. Dato il logaritmo 2.9999502, e mutata la caratteriſtica, trovo, che cade fra i due 3.9999131, e 3.9999566, al minore de' quali corriſponde 9998: e perciò il numero, che conviene al dato logaritmo colla caratteriſtica 3 ſarà 9998 con una frazione da cercarſi: ora quì, perchè la data caratteriſtica non è maggiore di 3, prendo un denominatore decadico ad arbitrio, come 100, e col mezzo della parte proporzionale veggo, che al propoſto logaritmo convengono $\frac{85}{100}$ ſopra l' intero 9998. Ora eſſendo queſto di quattro figure, e non avendo io biſogno, che di tre a cagione della data caratteriſtica 2, divido $9998\frac{85}{100}$ per 10, e ne proviene $999\frac{885}{1000}$. E queſto ſarà il numero ricercato.

De' logaritmi delle linee trigonometriche.

64 OLtre il canone de' logaritmi de' numeri assoluti, del quale finora abbiamo parlato, hanno gli autori aggiunte al canone trigonometrico due o tre colonne, nella prima delle quali hanno registrati a dirittura d'ogni arco, o angolo di ciascun grado, e minuto il logaritmo (preso dal canone de' logaritmi), che conviene al numero del sino di quell' angolo, il quale chiamasi da alcuni *senilogaritmo*, e da altri semplicemente *logaritmo di quell' arco*; nella seconda quello, che conviene al numero della tangente, e dicesi *mesologaritmo*, e da alcuni *tangilogaritmo*; e nella terza (la quale però molti tralasciano) quello, che conviene al numero della secante, detto *tomologaritmo*.

65 E' d' avvertire, che sebbene i sini, le tangenti, e le secanti registrate nel canone trigonometrico sono calcolate col raggio di 10000000, i logaritmi però, che convengono a queste linee le suppongono calcolate col raggio di 10000000000, come in fatti si trovano ne' canoni trigonometrici di alcuni autori. Onde è, che le carateristiche de' logaritmi de' sini, tangenti &c. non corrispondono al numero delle figure, che hanno queste linee nel canone trigonometrico ordinario; e il logaritmo v. g. del raggio (il qual raggio nel canone ordinario è 10000000) non ha per carateristica, 7, come lo richiede il raggio di 8° figure, ma 10, come domanda il raggio 10000000000 di undici figure, e così de' sini, tangenti &c. Tal diversità niente turba nelle operazioni trigonometriche, anzi riesce di comodo considerabile, mentre in queste entrando per lo più per uno de' dati il raggio, per cui deesi o moltiplicare, o dividere un altro numero dato; quando si fanno le operazioni per logaritmi basta aggiungere al logaritmo di questo numero un' unità a sinistra, o sottrarnela, per aggiungervi, o sottrarne il logaritmo del raggio, che equivale al moltiplicare, o rispettivamente al dividere per lo raggio.

66 Rispetto agli angoli, che oltre i gradi, e minuti hanno delle seconde, i logaritmi de' loro sini, tangenti &c. si trovano prendendo la parte proporzionale nello stesso modo, che

che si farebbe se si cercasse il sino, la tangente &c. di quell' arco: e all' incontro dato il logaritmo d' un sino, d' una tangente &c. se ne trova l' arco a gradi, minuti, e seconde, come se fosse dato un sino, una tangente &c.; operazioni, che sebbene non hanno tutto il rigore geometrico, sono tuttavia esenti da ogni errore sensibile.

67 Rispetto a' logaritmi delle secanti, che d' alcuni non si registrano nel canone trigonometrico, questi possono facilmente trovarsi mediante i logaritmi de' sini. Imperocchè in ogni angolo C A D, come sta la linea A B (*Fig.*22) (sino secondo dell' angolo C A D per l' art. 12) ad A C raggio, così sta A D raggio ad A E secante del medesimo angolo. Trovisi dunque il logaritmo del sino secondo dell' angolo dato, e sottraendolo dal doppio logaritmo del raggio, ne resterà il logaritmo della secante di quell' angolo (art. 44).

Della trigonometria logaritmica.

68 DA tutto ciò, che si è detto de' logaritmi si raccoglie, come tutte quelle operazioni trigonometriche, che consistono in trovare un quarto numero proporzionale a' tre dati si possono fare per via di logaritmi molto più comodamente, che per linee; o sia poi, che i numeri dati sieno numeri assoluti, de' quali si trovano i logaritmi nel canone logaritmico, o numeri di tangenti, sini &c., de' quali i logaritmi sono nel canone trigonometrico, e che lo stesso quarto, che si cerca sia dell' una, o dell' altra specie di numeri; si raccoglie, dico, come tutte queste operazioni possono farsi per logaritmi, cioè aggiungendo il logaritmo del secondo numero dato a quello del terzo, e dalla somma levando quello del primo, con che ne verrà il logaritmo del quarto; onde, trovato il numero, che a questo corrisponde, o sia nel canone logaritmico, o nel trigonometrico, si avrà il quarto numero, che si cerca. Noi ne tralasceremo gli esempj per brevità non potendo averne bisogno chi avrà ben inteso quanto si è fin' ora spiegato.

IL FINE.

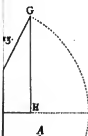
Vi-

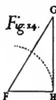
Vidit D. Aurelius Castanea Cler. Regul. S. Pauli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

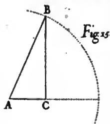
Die 9 Septembris 1755.

Imprimatur.

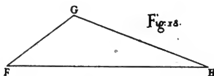
F. Petrus Paulus Salvatori Vicarius Gener. S. Officii Bononiæ.

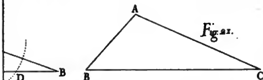












D	d
0	
	1
	2
3	
	4
	5
6	
	7
	8
9	

E	F
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9

